

باسمه تعالی

امتحان میان ترم درس فرآیندهای تصادفی

نیمسال اول سال تحصیلی -----

مدت امتحان: ۱۶۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

سوال ۱- (۱۵ نمره) - پرسشهای کوتاه

۱-۱) اگر تابع مشخصه توام دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به صورت $\varphi_{X_1, X_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{1 - j(\omega_1 + \omega_2) - \omega_1 \omega_2}$ باشد، میانگین و واریانس X_1 را پیدا کنید.

۱-۲) فرض کنید X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 4]$ و Y یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 1]$ و مستقل از X باشد. اگر $Z = X + Y$ آنگاه $f_z(4.5)$ را محاسبه کنید.

۱-۳) آیا تابع $\varphi(\omega) = \frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2}$ می تواند تابع مشخصه یک متغیر تصادفی باشد؟

سوال ۲- (۲۵ نمره) - فرض کنیم X_i ها متغیرهای تصادفی iid برنولی ($Bernolli(p)$) باشند و تعریف کنیم $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ عبارات زیر را به دست آورید.

$$E\{X_1 | Y_4 = 2\} \quad (۱-۲)$$

$$E\{Y_n Y_m\} \quad (۲-۲)$$

$$E\{Y_3\} \text{ و } Var(Y_3) \quad (۳-۲)$$

$$E\{Y_4 | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\} \quad (۴-۲)$$

$$P_r\{Y_5 = a\} \quad (۵-۲)$$

سوال ۳- (۳۰ نمره) - بردار تصادفی توأمماً گوسی $\underline{X} = [X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7]^T$ را در نظر می‌گیریم. در این بردار تصادفی داریم،

$$E\underline{X} = [m_{X_i}]_{8 \times 1} = [\cos\left(\frac{i\pi}{4}\right)]_{8 \times 1}, \quad [r_{X_i X_j}]_{8 \times 8} = \left[\cos\left(\frac{i\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{4}\right) + 4e^{-\frac{\pi}{4}|i-j|} \right]_{8 \times 8}$$

۱-۳) تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X_2}(x|X_4 = 1)$ را به دست آورید.

۲-۳) $E\{X_2^2 | X_4 = 1\}$ را به دست آورید.

۳-۳) تابع چگالی احتمال $\underline{Y} = [X_0, X_1, X_2]^T$ را به دست آورید.

۴-۳) $E\left\{X_0 \mid X_6 = \frac{1}{4}\right\}$ را به دست آورید.

۵-۳) $E\{X_0 X_1 X_2 X_3\}$ را به دست آورید.

۶-۳) ماتریس ابداع را برای بردار تصادفی $\underline{Y} = [X_0, X_1, X_2]^T$ به دست آورید.

سوال ۴- (۲۰ نمره) - در یک سیستم مخابراتی، هدف ارسال پیامهایی شامل بیت‌های صفر و یک (با احتمال وقوع یکسان و برابر $1/2$) است. این سیستم برای بیت صفر، مقدار $Y = a$ و برای بیت یک، مقدار $Y = -a$ را روی کانال می‌فرستد. در کانال، نویز جمع‌شونده N روی سیگنال اثر می‌گذارد که به صورت یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2 مدل می‌شود. بنابراین در گیرنده متغیر تصادفی R را دریافت خواهیم کرد و داریم، $R = Y + N$. در گیرنده اگر $R > 0$ دریافت شود، گیرنده نتیجه‌گیری می‌کند که بیت صفر ارسال شده است و اگر $R < 0$ دریافت شود، گیرنده نتیجه‌گیری می‌کند که بیت یک ارسال شده است. با توجه به روند گفته شده، احتمال خطا در نتیجه‌گیری را در گیرنده به دست آورید.