به نام زندگی

* بردارهای تصادفی Random vectors

- توابع احتمال دو بردار تصادفی $\underline{X}$, $\underline{Y}$

$$F_{XY}(\underline{x},\underline{y}) = P_r\{\underline{X} \le \underline{x} , \underline{Y} \le \underline{y}\}$$

$$= P_r\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n , Y_1 \le y_1 , \dots, Y_m \le y_m\} \quad (*)$$

$$f_{XY}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \underline{x}\,\partial \underline{y}} F_{XY}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}\,\partial \underline{y}} F_{XY}(\underline{x},\underline{y})$$

$$\varphi_{XY}(\underline{u},\underline{v}) = E\, e^{j(\underline{u}^T\underline{x} + \underline{v}^T\underline{y})}$$

* توابع احتمال شرطی

$$F_X(\underline{x}|\underline{y}) = F_X(\underline{x}|\underline{Y} \leq \underline{y}) = \frac{F_{XY}(\underline{x},\underline{y})}{F_Y(\underline{y})}$$

$$F_Y(\underline{y}|\underline{x}) = F_Y(\underline{y}|\underline{X} \leq \underline{x}) = \frac{F_{XY}(\underline{x},\underline{y})}{F_X(\underline{x})}$$

$$\xRightarrow{\text{رابطه زنجیره‌ای}} \quad F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = F_X(\underline{x} \mid \underline{y}) F_Y(y) = F_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) F_X(\underline{x})$$

$$f_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = f_X(\underline{x} \mid \underline{Y} = \underline{y}) = \frac{f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{f_Y(\underline{y})}$$

$$f_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = f_Y(\underline{y} \mid \underline{X} = \underline{x}) = \frac{f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{f_X(\underline{x})}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه زنجیره‌ای}} f_{XY}(\underline{x},\underline{y}) = f_X(\underline{x}|\underline{y})\, f_Y(\underline{y}) = f_Y(\underline{y}|\underline{x})\, f_X(\underline{x})$$

* استقلال دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$

مشابه حالت دو بعدی ، ۷ شرط معادل برای استقلال دو بردار تصادفی می‌توان بیان کرد.

$$
\left.
\begin{aligned}
&F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = F_X(\underline{x})\, F_Y(\underline{y}) \\
&f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = f_X(\underline{x})\, f_Y(\underline{y}) \\
&\varphi_{XY}(\underline{u}, \underline{v}) = \varphi_X(\underline{u})\, \varphi_Y(\underline{v}) \\
&F_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = F_X(\underline{x}) \\
&F_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = F_Y(\underline{y}) \\
&f_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = f_X(\underline{x}) \\
&f_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = f_Y(\underline{y})
\end{aligned}
\right\} \Longrightarrow \underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y}
$$

نکته‌ای در مورد کار کردن با دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ باید به آن توجه کنیم
این است که در این گونه موارد، بسته به ماهیت مسأله، می‌توانیم دو بردار
تصادفی را به صورت توأم تحلیل کنیم یا متغیرهای تصادفی دو بردار تصادفی
را با هم ادغام کنیم و یک بردار تصادفی با ابعاد بالاتر بسازیم و آن را تحلیل
کنیم (با توجه به رابطه (*))

$$\underline{X} = [x_1, \dots, x_n]^T, \qquad \underline{Y} = [y_1, \dots, y_m]^T$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{[\,\cdot\,]} \underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \hdashline \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

در این راستا، روابط زیر می‌توانند کمک کننده باشند.

1) $F_{XY}(\underline{x}, \underline{\infty}) = F_X(\underline{x})$

$F_{XY}(\underline{\infty}, \underline{y}) = F_Y(\underline{y})$

2) $\int_{-\underline{\infty}}^{\underline{\infty}} f_{\underline{X}\,\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y} = f_{\underline{X}}(\underline{x})$

$\int_{-\underline{\infty}}^{\underline{\infty}} f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x} = f_Y(\underline{y})$

3) $$\varphi_{XY}(\underline{u}, \underline{v})\Big|_{\substack{\underline{u}=\underline{u} \\ \underline{v}=\underline{0}}} = \varphi_{XY}(\underline{u}, \underline{0}) = \varphi_X(\underline{u})$$

$$\varphi_{XY}(\underline{u}, \underline{v})\Big|_{\substack{\underline{u}=\underline{0} \\ \underline{v}=\underline{v}}} = \varphi_{XY}(\underline{0}, \underline{v}) = \varphi_Y(\underline{v})$$

مثال: فرض کنیم بردار $\underline{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{10}]^T$ را در اختیار داریم و توابع احتمال آن یعنی $F_X(\underline{x})$ ، $f_X(\underline{x})$ ، $\varphi_X(\underline{\omega})$ برای ما مشخص است.

توابع احتمال زیر را به دست بیاورید.

$$Z_1 = [X_1, X_3, X_4]^T$$

$$Z_2 = [X_2, X_5, \dots, X_{10}]^T$$

$$F_X(\underline{x}) = F_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2)$$

1) $F_X(x_1, x_3, x_4) = F_{Z_1}(z_1)$

$$= F_X(\underline{z}_1, \underline{\infty})$$

2) $f_X(x_2, x_5, x_7) \equiv f_{Z_1}(z_1)$

$$= \int_{-\underline{\infty}}^{\underline{\infty}} f_X(\underline{z}_1, \underline{z}_2)\, d\underline{z}_2$$

$z_1 = [x_2, x_5, x_7]^T$

$z_2 = \dots$

3) $\varphi_X(\omega_1, \omega_3, \omega_5) = \varphi_{Z_1}(\underline{u})$

$$= \varphi_X(\underline{u}, \underline{0}) = \varphi_X(u_1, 0, u_3, 0, u_5, 0, \dots, 0)$$

$\underline{u} = [u_1 \quad u_3 \quad u_5]^T$

$z_1 = [x_1, x_3, x_5]^T$

$z_2 = \dots$

4) $$f_X(x_1, x_5 \mid x_2, x_7) = \frac{f_X(x_1, x_2, x_5, x_7)}{f_X(x_2, x_7)}$$

$$= \ldots$$

5) $$F_X(x_1, x_5 \mid x_2, x_7) = \frac{F_X(x_1, x_2, x_5, x_7)}{F_X(x_2, x_7)}$$

به این ترتیب برای بردار تصادفی $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ با توابع احتمال $f_{\underline{X}}(\underline{x})$

و $F_X(\underline{x})$ می توان روابط زنجیره ای را به فرم زیر نوشت.

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_X(x_1)\, F_X(x_2|x_1)\, F_X(x_3|x_2, x_1) \cdots F_X(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1)$$

$$= F_X(x_1) \prod_{i=2}^{n} F_X(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$$

$$= F_X(x_n)\, F_X(x_{n-1}|x_n)\, F_X(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \cdots F_X(x_1|x_n, \dots x_2)$$

$$f_X(\underline{x}) = f_X(x_1) f_X(x_2|x_1) f_X(x_3|x_2, x_1) \dots f_X(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1)$$

$$= f_X(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_X(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1) \equiv \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1)$$

$$= f_X(x_n) f_X(x_{n-1}|x_n) f_X(x_{n-2}|x_n, x_{n-1}) \dots f_X(x_1|x_n, \dots, x_2)$$

* استقلال توأم متغیرهای تصادفی بردار $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$

با توجه به رابطه‌ی زنجیره‌ای، متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ که المان‌های بردار تصادفی $\underline{X}$ هستند را توأماً مستقل می‌گوییم اگر توابع احتمال بردار تصادفی $\underline{X}$ (که معادل توابع احتمال توأم متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ است) تفکیک‌پذیر باشند یعنی

$$\left.\begin{aligned}
F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\
&\overset{\text{ا}}{\text{-}} \\
f_{X}(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\
&\overset{\text{ا}}{\text{-}} \\
\varphi_{X}(\underline{\omega}) &= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(\omega_i)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \cdots \perp\!\!\!\perp X_2$$

استقلال توأم

نتیجه: هر زیرمجموعه از متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$، به هر تعداد در نظر بگیریم، توأماً مستقل هستند.

نتیجه: هر دو زیربردار غیرهمپوشان از $\underline{X}$، مستقل از هم هستند.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. اگر بدانیم که متغیرهای تصادفی بردار $\underline{X} = (X_1 \cdots X_{10})^T$ توأماً مستقل هستند.

$X_1 \perp\!\!\!\perp (X_2\ X_3\ X_7)^T$ ✓

1) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_5 \perp\!\!\!\perp X_7$ ✓

2) $(X_1\ X_3\ X_5)^T \perp\!\!\!\perp (X_3\ X_7\ X_8)^T$ ✗

3) $(X_1\ X_2\ X_3)^T \perp\!\!\!\perp (X_{10}\ X_4\ X_6)^T$ ✓

* ممان های یک بردار تصادفی

در مورد بردارهای تصادفی، ممان های اول و دوم اهمیت ویژه دارند.

- ممان اول بردار تصادفی $\underline{X}$ = بردار میانگین

$$E\underline{X} = \underline{m}_{\underline{X}} = \underline{m}_X = [EX_1 \quad EX_2 \quad \cdots \quad EX_n]^T$$

$$= [m_{X_1} \quad m_{X_2} \quad \cdots \quad m_{X_n}]^T$$

* همان دوم بردار تصادفی $\underline{X}$

همان دوم بردار تصادفی $\underline{X}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$R_{\underline{X}} = E\,\underline{X}\,\underline{X}^{H} = E\begin{bmatrix} |X_1|^2 & X_1X_2^* & \cdots & X_1X_n^* \\ X_2X_1^* & |X_2|^2 & \cdots & X_2X_n^* \\ \vdots & & & \\ X_nX_1^* & X_nX_2^* & \cdots & |X_n|^2 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\Rightarrow R_X = \begin{bmatrix} E|X_1|^2 & E X_1 X_2^* & \cdots & E X_1 X_n^* \\ E X_2 X_1^* & E|X_2|^2 & \cdots & E X_2 X_n^* \\ \vdots & & & \\ E X_n X_1^* & E X_n X_2^* & \cdots & E|X_n|^2 \end{bmatrix} = \left[r_{X_i X_j} \right]_{n \times n}$$

$$R_X = \begin{bmatrix} r_{X_1} & r_{X_1 X_2} & \cdots & r_{X_1 X_n} \\ r_{X_2 X_1} & r_{X_2} & \cdots & r_{X_2 X_n} \\ \vdots & & & \\ r_{X_n X_1} & r_{X_n X_2} & \cdots & r_{X_n} \end{bmatrix}$$

یادآوری: ضرب خارجی یا ماتریسی دو بردار

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$

$\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$

$$\underline{a}\,\underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & & & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{bmatrix} = \left[a_i b_j \right]_{n \times m}$$

$$= (b a^T)^T$$

$$\underline{a}^H = (\underline{a}^*)^T = (\underline{a}^T)^*$$

* به ماتریس $R_{\underline{X}}$ ، ماتریس همبستگی بردار تصادفی $\underline{X}$ می‌گوییم.

عناصر ماتریس همبستگی نشان دهنده‌ی همبستگی متقابل عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ هستند. عناصر روی قطر اصلی ماتریس R_X ، نشان دهنده‌ی خودهمبستگی متغیرهای تصادفی بردار هستند.

* با توجه به تعریف ماتریس همبستگی، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس همبستگی هر بردار تصادفی $\underline{X}$ ، دارای تقارن هرمیتی است یعنی

$$R_X^H = R_X$$

$$R_X^H = \left(E\underline{X}\,\underline{X}^H\right)^H = E\left(\underline{X}\,\underline{X}^H\right)^H = E\left(\underline{X}\,\underline{X}^H\right) = R_X$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad , \quad (AB)^H = B^H A^H$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

به شرط معکوس پذیری

$$(A^T)^T = A, \quad (A^H)^H = A$$

* اگر همه عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$، متغیرهای تصادفی حقیقی باشند آنگاه، R_X یک ماتریس متقارن خواهد بود.

حقیقی: $X \Rightarrow X^H = X^T$

$$\Rightarrow R_X = E\,\underline{X}\,\underline{X}^T \Longrightarrow R_X^T = R_X$$

R_X متقارن

* اگر عناصر بردار تصادفی X ، دو به دو متعامد باشند یعنی

$$\forall i \neq j \quad ; \quad E X_i X_j^* = r_{X_i X_j} = 0$$

$$X_i \perp X_j$$

آنگاه ماتریس همبستگی یک ماتریس قطری به فرم زیر خواهد بود.

$$R_X = \mathrm{Diag}\left(r_{X_1}, r_{X_2}, \dots, r_{X_n}\right) = \mathrm{Diag}\left(P_{X_1}, P_{X_2}, \dots, P_{X_n}\right)$$

* ممان دوم مرکزی بردار تصادفی $\underline{X}$

مشابه حالت یک بعدی، برای بردار تصادفی $\underline{X}$ نیز می‌توانیم ممان دوم مرکزی تعریف کنیم. ممان دوم مرکزی نسبت به بردار تصادفی مرکزی مشاهده با $\underline{X}$

یعنی $\underline{\tilde{X}} = \underline{X} - \underline{m}_X$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_X = E\,\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^H = \begin{bmatrix} E|\tilde{X}_1|^2 & E\tilde{X}_1\tilde{X}_2^* & \cdots & E\tilde{X}_1\tilde{X}_n^* \\ \vdots & & & \\ E\tilde{X}_n\tilde{X}_1^* & E\tilde{X}_n\tilde{X}_2^* & \cdots & E|\tilde{X}_n|^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس کواریانس

که به آن C_X ماتریس کواریانس بردار تصادفی $\underline{X}$ می‌گوییم

که نشان دهنده‌ی کواریانس متقابل عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ است و عناصر روی قطر اصلی آن نشان دهنده‌ی واریانس عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ است.

$$C_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \overset{\sigma_{x_1}^2}{C_{x_1}} & C_{x_1x_2} & \cdots & C_{x_1x_n} \\ C_{x_2x_1} & C_{x_2} & \cdots & C_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ C_{x_nx_1} & C_{x_nx_2} & \cdots & C_{x_n} \end{bmatrix} = \left[C_{x_ix_j}\right]_{n\times n} = \left[\sigma_{x_ix_j}\right]_{n\times n}$$

* با توجه به تعریف ماتریس کواریانس C_X ، می‌توان گفت که ماتریس C_X در واقع ماتریس همبستگی بردار تصادفی $\vec{X}$ است. بنابراین هر خصوصیتی که در مورد ماتریس‌های همبستگی وجود دارد، به طور مشابه برای ماتریس کواریانس نیز قابل بیان است.

* با توجه به تعریف ماتریس کواریانس $C_{\underline{X}}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس کواریانس هر بردار تصادفی $\underline{X}$ دارای تقارن هرمیتی است یعنی

$$C_x^H = C_x$$

(به عنوان تمرین نشان دهید)

و اگر عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ ، حقیقی باشند، ماتریس کواریانس متقارن خواهد بود

یعنی

$$C_x^T = C_x$$

* اگر عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ ، دو به دو ناهمبسته باشند یعنی

$$\forall i \neq j \quad ; \quad E\tilde{X}_i \tilde{X}_j^* = C_{X_i X_j} = \sigma_{X_i X_j} = 0$$

$$X_i \text{ و } X_j \quad \text{یا} \quad E X_i X_j^* = E X_i \cdot E X_j^*$$

آنگاه ماتریس $C_{\underline{X}}$ یک ماتریس قطری به صورت زیر خواهد بود ،

$$C_X = \mathrm{Diag}\left(\sigma^2_{X_1}, \sigma^2_{X_2}, \ldots, \sigma^2_{X_n}\right)$$

* مشابه حالت تک بعدی، همواره رابطه‌ای بین R_X (ممان دوم بردار تصادفی) و C_X (ممان دوم مرکزی بردار تصادفی) وجود دارد.

$$C_X = E\,\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^H = E\left(\underline{X} - \underline{m}_X\right)\left(\underline{X} - \underline{m}_X\right)^H$$

$$= E\left(\underline{X}\,\underline{X}^H - \underline{m}_X\,\underline{X}^H - \underline{X}\,\underline{m}_X^H + \underline{m}_X\,\underline{m}_X^H\right)$$

$$\underset{\text{خطی } E\{\cdot\}}{=} \underbrace{E\,\underline{X}\,\underline{X}^H}_{R_X} - \underline{m}_X \overbrace{E\,\underline{X}^H}^{\underline{m}_X^H} - \underbrace{E\,\underline{X}}_{\underline{m}_X}\,\underline{m}_X^H + \underline{m}_X\,\underline{m}_X^H$$

$$\Longrightarrow \quad C_{\underline{x}} = R_{\underline{x}} - \underline{m}_x \underline{m}_x^H$$

به طریق مشابه برای بردار تصادفی

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

و

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^T$$

نیز می‌توانیم ممان‌های متقابل از مرتبه‌ی اول نسبت به $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را تعریف کنیم.

$$R_{\underline{X}\underline{Y}} = E\,\underline{X}\,\underline{Y}^{H} = \left[E X_i Y_j^{*}\right]_{n\times m} = \left[r_{X_i X_j}\right]_{n\times m}$$

$R_{\underline{X}\underline{Y}}$ را ماتریس همبستگی متقابل دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ می‌گوییم که عناصر آن نشان دهنده‌ی همبستگی متقابل عناصر بردارهای تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ است.

همان متقابل مرکزی دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ (از مرتبه‌ی اول نسبت به $\underline{X}$ و $\underline{Y}$) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_{\underline{X}\underline{Y}} = E\,\tilde{\underline{X}}\,\tilde{\underline{Y}}^{H} = \left[E\,\tilde{X}_i\,\tilde{Y}_j^{*}\right]_{n\times m} = \left[C_{X_iY_j}\right]_{n\times m}$$

ماتریس $C_{\underline{X}\underline{Y}}$ را ماتریس کوواریانس متقابل دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ می‌گوییم که عناصر این ماتریس نشان دهنده‌ی کوواریانس متقابل عناصر بردارهای تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ هستند.

* ماتریس های همبستگی متقابل R_{xy} و کوواریانس متقابل C_{xy}

دارای نوعی تقارن (هرمیتی) به صورت زیر هستند.

$$R_{xy}^{H} = R_{yx} \quad , \quad C_{xy}^{H} = C_{yx}$$

$$R_{xy}^{H} = \left(E\,\underline{x}\,\underline{y}^{H}\right)^{H} = E\left(\underline{x}\,\underline{y}^{H}\right)^{H} = E\,\underline{y}\,\underline{x}^{H} = R_{yx}$$

* اگر عناصر بردارهای تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ دو به دو متعامد باشند یعنی

$$\forall i, j \; ; \quad E X_i Y_j^* = 0 \quad \text{یا} \quad X_i \perp Y_j$$

در این صورت داریم

$$R_{\underline{X}\,\underline{Y}} = [0]$$

در این صورت می‌گوییم دو بردار تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ متعامد هستند

$$R_{XY} = [0] \iff \underline{X} \perp Y$$

* اگر عناصر بردارهای تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ دو به دو ناهمبسته باشند یعنی

$$\forall i, j \quad X_i \perp Y_j \quad \Rightarrow \quad E\tilde{X}_i \tilde{Y}_j^* = \sigma_{X_i Y_j} = C_{X_i Y_j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E X_i Y_j^* = E X_i E Y_j^*$$

در این صورت ماتریس کواریانس $C_{\underline{X}\underline{Y}}$ برابر است با:

$$C_{XY} = [0]$$

و دو بردار $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را ناهمبسته می‌گوییم.

$$C_{XY} = [0] \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{X} \perp \underline{Y}$$

* رابطه‌ی بین R_{xy} و C_{xy}

$$C_{xy} = E\,\underline{\tilde{x}}\,\underline{\tilde{y}}^H = E\,(\underline{x} - \underline{m}_x)(\underline{y} - \underline{m}_y)^H$$

$$\Rightarrow C_{xy} = R_{xy} - m_x m_y^H$$

(به عنوان تمرین نشان دهید)