به نام زندگی

آزمون میان ترم روز شنبه ۹۸/۲۶ ساعت 10

کلاس حل تمرین رفع اشکال دوشنبه ۹۸/۲۱ ساعت 13:30

مثال هایی از متغیرهای تصادفی

- متغیر تصادفی نرمال دوبعدی (توزیع گوسی)

Binormal

$$\varphi_{xy}(\omega_1, \omega_2) = e^{j(\omega_1 m_x + \omega_2 m_y) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 \sigma_x^2 + \omega_2^2 \sigma_y^2 + 2\omega_1\omega_2 \sigma_{xy})}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}}\, e^{-\frac{\sigma_y^2(x-m_x)^2 + \sigma_x^2(y-m_y)^2 - \sigma_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}}$$

یادآوری از برخی خصوصیات متغیرهای توأماً نرمال

۱- اگر $(X,Y)^T$ توأماً نرمال باشند می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی X و Y نیز هر یک نرمال هستند. (ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست)

(به عنوان تمرین نشان دهید - از $\phi_{XY}(w_1,w_2)$ یا $f_{XY}(x,y)$ کمک بگیرید)

$$X = 1X + 0Y \sim N$$

$$Y = 0X + 1Y \sim N$$

2- اگر X و Y هر دو نرمال باشند و داشته باشیم $X \perp\!\!\!\perp Y$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $(X,Y)^T$ توأماً نرمال هستند.

(به عنوان تمرین نشان دهید. راهنمایی

$$\varphi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = \varphi_X(\omega_1)\varphi_Y(\omega_2)$$

یا

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

3- اگر $(X,Y)^T$ توأماً نرمال باشند، آنگاه $f_X(x|y)$ و $f_Y(y|x)$ نیز نرمال خواهند بود یعنی

$$f_X(x|y) \equiv N(m_{X|Y}, \sigma^2_{X|Y})$$

$$f_Y(y|x) \equiv N(m_{Y|X}, \sigma^2_{Y|X})$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\left(f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\right.$$

به عنوان ترین، نشان دهید. راهنمایی

$$m_{X|Y} = m_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma^2_Y}(y - m_Y) = m_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y)$$

تابعی از y است)

$$\sigma^2_{X|Y} = (1 - \rho^2_{XY})\,\sigma^2_X = \sigma^2_X - \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_Y}$$

در حالت نرمال گوسی تابعیت از y ندارد.

۴ - اگر $(X,Y)^T$ توأماً نرمال باشند از ناهمبسته بودن آنها، می‌توان استقلال آنها را نتیجه گرفت.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad , \quad (X,Y)^T \sim \underset{\text{Binormal}}{N} \implies X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\left(\sigma_{XY} = 0 \rightarrow \varphi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = \varphi_X(\omega_1)\,\varphi_Y(\omega_2) \right.$$

(به عنوان ترین نشان دهنده - راهنمایی)

یا

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

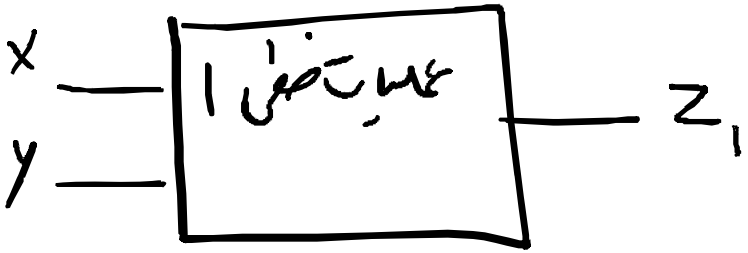
۵- اگر $(X, Y)^T$ توأماً نرمال باشند هر ترکیب خطی دلخواه از این دو متغیر تصادفی نیز، توأماً نرمال خواهند بود.

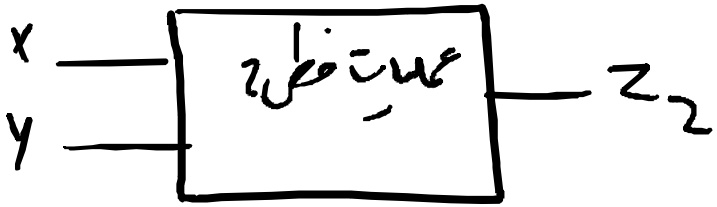
$$(X, Y)^T \sim \text{Binormal}, \quad \begin{cases} Z_1 = a_1 X + b_1 Y \\ Z_2 = a_2 X + b_2 Y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (Z_1, Z_2)^T \sim \text{Binormal}$$

زیرا هر ترکیب خطی دلخواه از Z_1, Z_2 در واقع یک ترکیب خطی از X و Y است و نرمالیه متغیر تصادفی

$(Z_1, Z_2) \sim \text{Binormal}$ ← نرمال می‌کند





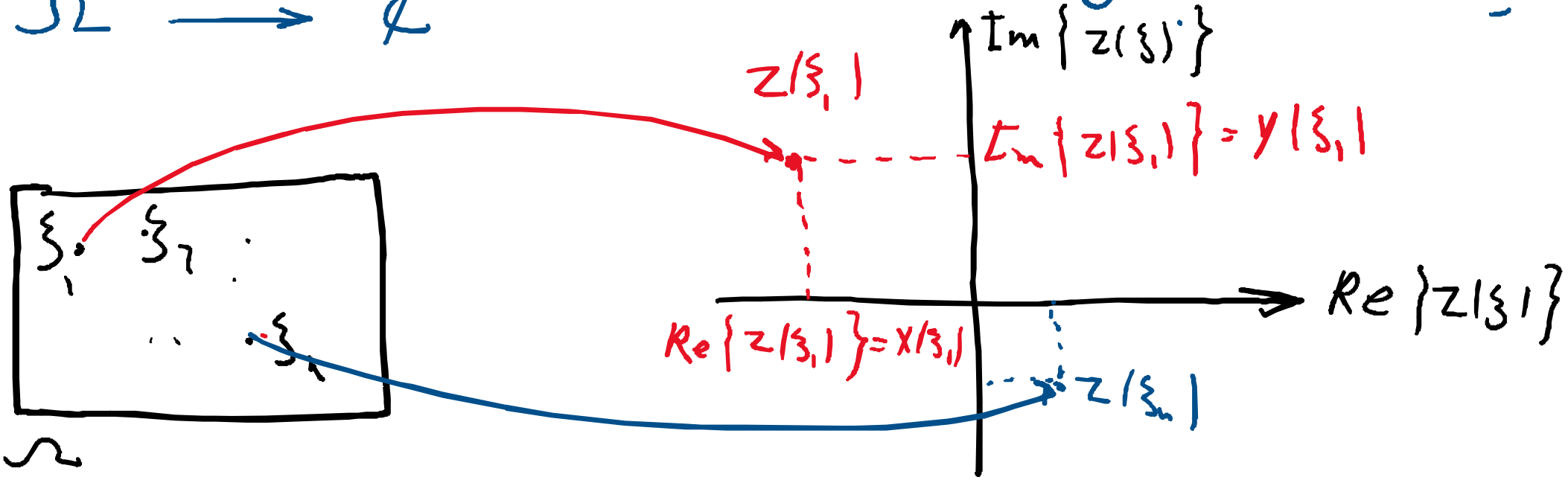
$\Longrightarrow \quad (Z_1, Z_2) \sim \text{Binormal}$

به این ترتیب مطالبی که در ارتباط با متغیرهای تصادفی یک بعدی و دو بعدی به آن نیاز داریم را بررسی کردیم. در ادامه می‌خواهیم حالت برداری در نظر بگیریم و بردارهای تصادفی و ابزارهای کار با آنها را به عنوان ابزارهای اصلی کار با فرآیندهای تصادفی معرفی کنیم. قبل از بیان این بحث، ابتدا متغیرهای تصادفی مختلط را معرفی کنیم و در ادامه بحث به طور کلی متغیرهای تصادفی را مختلط در نظر می‌گیریم.

* متغیرهای تصادفی مختلط $Z(\xi)$

متغیر تصادفی مختلط $Z(\xi)$ تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه، یک عدد مختلط نسبت می‌دهد

$$\Omega \xrightarrow{Z(\xi)} \mathbb{C}$$



از ریاضیات اعداد مختلط می دانیم که

$$Z(\xi) = X(\xi) + jY(\xi) = \underbrace{Re\{Z(\xi)\}}_{X(\xi)} + j\underbrace{Im\{Z(\xi)\}}_{Y(\xi)}$$

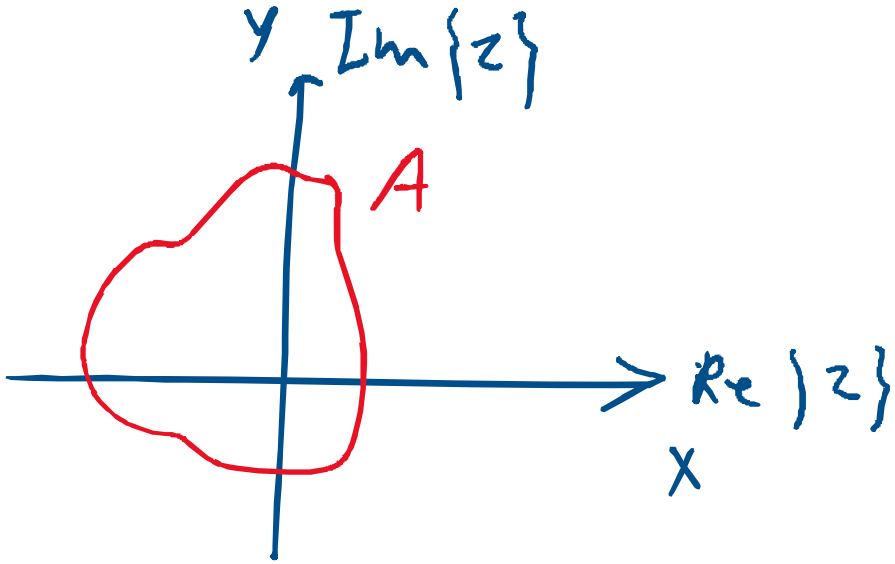
$Z = X + jY$ (به اختصار)

بنابراین برای کار کردن با متغیر تصادفی مختلط $Z(\xi)$ باید به طور توأم با قسمتهای حقیقی و موهومی آن کار کنیم. بنابراین به توابع احتمال توأم X و Y نیاز داریم

$$X \equiv X(\xi) = Re\{Z(\xi)\}, \qquad Y \equiv Y(\xi) = Im\{Z(\xi)\}$$

به عنوان مثال :

$$P_r\{Z \in A\} = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$



$$E\{g(\overset{x+jy}{z})\} = E\{g(x,y)\} = \iint g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

!

* ممان‌های یک متغیر تصادفی مختلط Z (ممان اول و دوم)

1) $EZ = E(X+jY) = EX + jEY = m_X + j m_Y = m_Z$

2) $EZZ^* = E|Z|^2 = E(X^2+Y^2) = EX^2 + EY^2 = r_Z$

$P_Z = P_X + P_Y = r_X + r_Y$

3) $E\tilde{Z}\tilde{Z}^*$, $\tilde{Z} = \underset{X+jY}{Z} - \underset{m_X+jm_Y}{EZ} = \tilde{X} + j\tilde{Y}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a}^T \cdot \underline{b}^* = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle^* = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*$$

$$\boxed{= \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}$$

صنعتی

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ضرب داخلی دو بردار

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$$
$$\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$$

3) $E\tilde{Z}\tilde{Z}^* = E|\tilde{Z}|^2 = E(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) = E\tilde{X}^2 + E\tilde{Y}^2$

$$C_Z \equiv \underset{Var(Z)}{\sigma_Z^2} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = C_X + C_Y$$

همان طور که می‌بینیم با این تعریف از زمان‌های مرتبه دوم (بر اساس ضرب داخلی در اسکالر)

زمان‌ها حقیقی خواهند بود و فقط به زمان‌های مشاهده شده حقیقی و

موهومی Z وابسته هستند.

* برای دو متغیر تصادفی مختلط Z_1, Z_2 ، ممان های متقابل به صورت زیر تعریف می شوند

1) $r_{Z_1 Z_2} = E Z_1 Z_2^*$

2) $C_{Z_1 Z_2} \equiv \sigma_{Z_1 Z_2} = E \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^* = r_{Z_1 Z_2} - m_{Z_1} m_{Z_2}^*$

به عنوان تمرین به اثبات بیاورید

$\tilde{Z}_1 = Z_1 - m_{Z_1}$

$\tilde{Z}_2 = Z_2 - m_{Z_2}$

$$r_{z_1 z_2} = 0 \;\; \text{یا} \;\; E z_1 z_2^* = 0 \implies z_1 \perp z_2$$

$$C_{z_1 z_2} = 0 \;\; \text{یا} \;\; \sigma_{z_1 z_2} = 0 \;\; \text{یا} \;\; r_{z_1 z_2} = m_{z_1} m_{z_2}^* \implies z_1 \perp\!\!\!\perp z_2$$

* نامساوی شوارتز

$$\left| E z_1 z_2^* \right|^2 \leq E|z_1|^2 \, E|z_2|^2 \rightarrow r_{z_1 z_2}^2 \leq P_{z_1} P_{z_2}$$

$$\left| E \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^* \right|^2 \leq E|\tilde{z}_1|^2 \, E|\tilde{z}_2|^2 \rightarrow \sigma_{z_1 z_2}^2 \leq \sigma_{z_1}^2 \, \sigma_{z_2}^2$$

* تساوی به مفهوم MS

$$E|Z_1 - Z_2|^2 = 0 \implies Z_1 \overset{MS}{=} Z_2$$

* متغیر تصادفی گوسی مختلط

متغیر تصادفی مختلط Z را یک متغیر تصادفی گوسی مختلط می‌گوییم اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی آن توأماً نرمال باشند (هر ترکیب خطی دلخواه از قسمت‌های حقیقی و موهومی آن توزیع یک متغیر تصادفی نرمال بکند)

تمرین: دو رابطه‌ی زیر را اثبات کنید

$$Z_1 \perp Z_2 \ , \quad Z = Z_1 + Z_2 \implies P_Z = P_{Z_1+Z_2} = P_{Z_1} + P_{Z_2}$$

$$Z_1 \perp Z_2 \ , \quad Z = Z_1 + Z_2 \implies \sigma_Z^2 = \sigma_{Z_1+Z_2}^2 = \sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2$$

تمرین سری سوم:

2) 12, 15, 16, 27

3) 5, 8

4) 1, 20, 22

5) 1, 6, 8, 18, 32, 35, 48

6) 12, 16, 18, 26, 30, 41, 66

* بردارهای تصادفی — Random Vectors

بردار تصادفی

$$\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]^T$$

$$X(\xi) = [X_1(\xi) \ X_2(\xi) \ \cdots \ X_n(\xi)]^T$$

تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه، یک بردار عددی نسبت می‌دهد

$$\Omega \xrightarrow{\underline{X}} \mathbb{C}^n \ \text{یا} \ \mathbb{R}^n$$

$$\Omega \xrightarrow{X_1} \mathbb{C}$$

$$\Omega \xrightarrow{X_2} \mathbb{C} \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega \xrightarrow{\underline{X}} \mathbb{C}^n$$

$$\vdots$$

$$\Omega \xrightarrow{X_n} \mathbb{C}$$

به عبارت دیگر بردار تصادفی $\underline{X}$ را می‌توانیم به صورت مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ در نظر بگیریم که می‌خواهیم به صورت توأم با آنها کار کنیم.

بنابراین می‌توانیم توابع احتمال یک بردار تصادفی $\underline{X}$ را به صورت توابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ در نظر بگیریم.

قبل از تعریف این توابع، نوتاسیون برداری مورد استفاده در این درس را بیان می‌کنیم.

1) $X_1 \leq a_1 \ , \ X_2 \leq a_2 \ , \dots , \ X_n \leq a_n \quad \equiv \quad \underline{X} \leq \underline{a}$

$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

2) $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \cdots \quad \equiv \quad \int_{\underline{a}}^{\underline{b}}$

3) $$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \equiv \frac{\partial^n}{\partial \underline{x}} \equiv \frac{\partial}{\partial \underline{x}}$$

اختصار

4) $$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g(\underline{x})$$

5) $$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \equiv d\underline{x}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \equiv \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} g(\underline{x})\, d\underline{x}$$

- تابع توزیع احتمال بردار تصادفی $\underline{X}$

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P_r\{X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \dots \cap X_n \leq x_n\}$$

معادل تابع توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$

$$\underset{\text{اختصار}}{=} P_r\{\underline{X} \leq \underline{x}\}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

متغیر: با حروف کوچک

متغیرهای تصادفی: با حروف بزرگ

- تابع چگالی احتمال بردار تصادفی $\underline{X}$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) \triangleq \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\underline{X}}(\underline{x}) \underset{\text{اختصار}}{=} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} F_{\underline{X}}(\underline{x})$$

- تابع مشخصه بردار تصادفی $\underline{X}$

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) = E\, e^{j\omega_1 X_1} e^{j\omega_2 X_2} \dots e^{j\omega_n X_n} = E\, e^{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_n X_n)}$$

$$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$$

$$\Rightarrow \varphi_{\underline{x}}(\underline{\omega}) = E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i} = E\, e^{j\underline{\omega}^T \underline{x}}$$

فرم برداری

* تمام مطالبی که در حالت دو بعدی بیان کردیم، در حالت n بعدی نیز قابل تعمیم هستند.

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} F_{\underline{x}}(\underline{x}) \Rightarrow F_{\underline{x}}(\underline{x}) = \int_{-\underline{\infty}}^{\underline{x}} f_{\underline{x}}(\underline{\alpha})\, d\underline{\alpha}$$

$$\varphi_{\underline{X}}(-\underline{\omega}) \xleftrightarrow[\text{همدیگر}]{FT} f_{\underline{X}}(\underline{x})$$

$$P_r\{\underline{X} \in A\} = \int_A f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$A \subseteq \mathbb{C}^n$$

به طور مشابه، برای دو بردار تصادفی

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

و

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^T$$

نیز می‌توانیم توابع احتمال توأم تعریف کنیم.

تابع توزیع احتمال توأم $\underline{X}$ و $\underline{Y}$

$$F_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y}) = P_r\{X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n \wedge Y_1 \leq y_1 \wedge \dots \wedge Y_m \leq y_m\} \quad (*)$$

$$F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = P_r\{\underline{X} \leq \underline{x} \wedge \underline{Y} \leq \underline{y}\}$$

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$$

* تابع چگالی احتمال توأم $\underline{X}$, $\underline{Y}$

$$f_{\underline{X}\,\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \underline{x}\, \partial \underline{y}} F_{\underline{X}\,\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}\, \partial \underline{y}} F_{\underline{X}\,\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y})$$

اختصار

* تابع مشخصه توأم $\underline{x}$ و $\underline{y}$

$$\varphi_{\underline{x}\,\underline{y}}(\underline{u},\underline{v}) = E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} u_i x_i}\, e^{j\sum_{i=1}^{m} v_i y_i} = E\, e^{j\underline{u}^T\underline{x}}\, e^{j\underline{v}^T\underline{y}}$$

$$= E\, e^{j(\underline{u}^T x + \underline{v}^T \underline{y})} = \varphi_{\underline{x}\,\underline{y}}(\underline{u},\underline{v})$$

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \equiv (w_1, \ldots, w_n)^T$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^T = (w_{n+1}, \ldots, w_{n+m})^T$$

$$\underline{X}(\xi_1) = \left[X_1(\xi_1) \quad X_2(\xi_1) \cdots \quad X_n(\xi_1) \right]^T \qquad \Omega_1$$

$$\underline{Y}(\xi_2) = \left[Y_1(\xi_2) \quad Y_2(\xi_2) \cdots \quad Y_m(\xi_2) \right]^T \qquad \Omega_2$$

$$(\underline{X}, \underline{Y})$$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$$