به نام خدا

چند مثال شرطی مهم

1) $\underbrace{E\{X|Y\}}_{m_{X|Y}} = E\,X|y = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|y)\,dx$ تابعی از y است

$Y=y$

نماد

* جواب تخمین MMSE از X برحسب مشاهدات $Y=y$ است.

$E|X-\hat{X}|^2$: Min

تخمین از X

$\hat{X}_{MMSE} = \text{Arg Min}\; E|X-\hat{X}|^2$

$= E\,X|Y$

2) $E\underbrace{X^2}_{\text{قدرت به صورت شرطی}}|y^{\,y=y} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x|y)\,dx = \underbrace{P_{X|y}}_{\text{تکان}} = \underbrace{r_{X|y}}_{\text{تکان}}$ = تابعی از $y=y$

3) $\underbrace{Var(X|y)}_{\sigma^2(X|y)\,=\,C_{X|y}} = \overbrace{E\,X^2|y}^{P_{X|y}} - \overbrace{E^2 X|y}^{m^2_{X|y}}$ = در حالت کلی تابعی از $y=y$

خطای تخمین $e = E_y\{Var(X|y)\}$

MMSE

$$E|X-\hat{X}|^2\Big|_{Min} = e$$

تساوی دو متغیر تصادفی

به دلیل ماهیت تصادفی متغیرهای تصادفی و تابعیت آنها از نقاط فضای نمونه $X = X(\xi)$ تساوی دو متغیر تصادفی X و Y با مفاهیم مختلفی قابل تعریف است که در این بخش به بیان برخی از این مفاهیم می‌پردازیم.

۱) تساوی به مفهوم دقیق ریاضی

منظور از این نوع تساوی، تساوی در تمام نقاط فضای نمونه است یعنی

$$X = X(\xi),\quad Y = Y(\xi) \quad ; \quad \forall \xi \in \Omega \quad ; \quad X(\xi) = Y(\xi) \Rightarrow X \overset{e}{=} Y$$

به این تساوی، تساوی در همه جا (every where) نیز گفته می‌شود. یعنی تساوی در تمام نقاط

فضای نمونه. به همین جهت این تساوی، قوی‌ترین مفهوم ریاضی در تساوی دو متغیر تصادفی است اما از طرف دیگر بررسی و اثبات آن می‌تواند پیچیده باشد. به همین جهت تساوی با مفاهیم دیگری نیز تعریف می‌شود.

2) تساوی به مفهوم احتمال یا تساوی با احتمال یک with Probability 1

منظور از این نوع تساوی، تساوی دو متغیر تصادفی در تمام نقاط فضای نمونه به جز یک زیرمجموعه از نقاط که دارای احتمال صفر (تقریباً صفر) هستند.

$$P_r\{X = Y\} \equiv P_r\{\xi \mid X(\xi) = Y(\xi)\} \simeq 1 \quad \Longrightarrow \quad X \overset{w.p.1}{=} Y$$

$$\Rightarrow P_r\{\xi \mid X(\xi) \neq Y(\xi)\} \simeq 0 \qquad \Rightarrow X \overset{w.p.1}{=} Y$$

به همین دلیل به این نوع تساوی، تساوی تقریباً در همه جا نیز گفته می‌شود.

Almost everywhere

$$X \overset{w.p.1}{=} Y \quad \text{یا} \quad X \overset{a.e.}{=} Y$$

بررسی این تساوی به دلیل اینکه احتمال پیش آمدها و احتمال پیش آمد هر کاردلرد، نسبت به تساوی در همه جا، ساده‌تر خواهد بود. اما در مسائل کاربردی علاقه‌مند هستیم که به جای کار کردن با فضای نمونه و پیش آمدها، با متغیرهای تصادفی و خصوصیات آماری آنها سروکار داشته باشیم. به همین جهت تساوی به مفهوم MS می‌تواند

به ما کمک کند.

3) تساوی به مفهوم MS (Mean Square)

تساوی دو متغیر تصادفی X و Y به مفهوم MS، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X-Y)^2 = 0 \implies X \overset{MS}{=} Y$$

$$E(X^2+Y^2-2XY) = 0 \implies X \overset{MS}{=} Y$$

$$EX^2 + EY^2 = 2EXY \implies X \overset{MS}{=} Y$$

$$P_X + P_Y = 2r_{XY} \implies X \overset{MS}{=} Y$$

بر این ترتیب خواهیم دید که برای بررسی تساوی دو متغیر تصادفی به مفهوم MS ، فقط با همان دو متغیرهای تصادفی X و Y سروکار داریم و نیازی به کارکردن با فضای نمونه و پیش‌آمدها نداریم.

* علاوه بر این تساوی به مفهوم MS از نظر ریاضی نیز به اندازه کافی قوی هست. زیرا از تساوی دو متغیر تصادفی به مفهوم MS ، می‌توان تساوی آنها به مفهوم قریباً در همه جا را نتیجه گرفت.

$$X \overset{MS}{=} Y \xrightarrow[\text{تحقیق یافته}]{\text{نامساوی چبیشف}} X \overset{a.e}{=} Y$$

4) تساوی در توزیع

منظور از این تساوی، تساوی توابع احتمال دو متغیر تصادفی X و Y است. در نتیجه این نوع تساوی هیچ ارتباطی با تساوی دو متغیر تصادفی در نقاط فضای نمونه ندارد.

$$\forall a \in \mathbb{R} \; ; \quad F_X(a) = F_Y(a) \implies X \overset{dist}{=} Y$$

بنابراین این مفهوم از نظر ریاضی مفهوم ضعیفی است زیرا تساوی در هیچ نقطه‌ای از فضای نمونه را نمی‌شود از آن نتیجه‌گیری کرد.

از نظر ریاضی نیز داریم

$$X \overset{e}{=} Y \implies X \overset{a.e}{=} Y \implies X \overset{dist}{=} Y$$

$$X \overset{ms}{=} Y \implies X \overset{a.e.}{=} Y \implies X \overset{dist}{=} Y$$

در ادامه می خواهیم توابع و ابزارهای دیگری را برای تجزیه و تحلیل و استخراج خصوصیات متغیرهای تصادفی معرفی کنیم.

* تابع مشخصه (cf) Characteristic function

تابع مشخصه برای یک متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر تعریف می شود.

$$\varphi_X(w) = E\{e^{jwX}\} = Ee^{jwX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_X(x)\,dx$$

با توجه به تعریف تابع مشخصه می‌توان نوشت

$$\varphi_X(-\omega) \xleftrightarrow{FT} f_X(x)$$

$$s(t) \quad , \quad S(f) = FT\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\xrightarrow{\text{duality}} \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(f)}_{\text{ضریب مؤلفه}}\, \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{\text{مؤلفه فرکانسی مختلط}}\, df$$

به این ترتیب تمامی خصوصیاتی که در مورد تبدیل فوریه می‌دانیم برای $f_X(x)$ ، $\varphi_X(-\omega)$ نیز برقرار است. بنابراین از این خصوصیات می‌توانیم برای حل مسائلی که با کمک $f_X(x)$ راه‌حل پیچیده دارند، استفاده کنیم و با کمک $\varphi_X(\omega)$ مسأله را راحت‌تر حل کنیم.

علاوه بر این از $\varphi_X(\omega)$ می‌توان برای استخراج خصوصیات آماری متغیر تصادفی X نیز کمک گرفت.

$$\varphi_X(-\omega) \xleftrightarrow{FT} f_X(x)$$

$$\varphi_X(\omega) = E\, e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx$$

$$f_X(x) = FT^{-1}\{\varphi_X(-\omega)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(-\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega$$

$$\underset{\substack{\text{تغییر متغیر} \\ \omega \to -\omega}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(\omega)\, e^{-j\omega x}\, d\omega$$

با داشتن $\varphi_X(\omega)$ می‌توان $f_X(x)$ را به دست آورد و بالعکس.

همچنین می‌توانیم از خواص تبدیل فوریه برای حل مسایل و استخراج خصوصیات متغیرهای استفاده کنیم.

مثال: متغیرهای تصادفی X و Y را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این دو متغیر مستقل از هم باشند

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

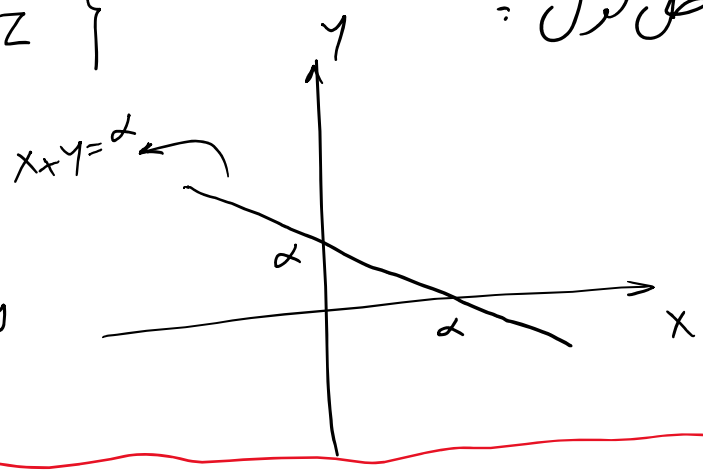
متغیر تصادفی Z را به صورت $Z = X + Y$ تعریف می‌کنیم. تابع چگالی احتمال Z را برحسب توابع احتمال X و Y به دست بیاورید.

راه حل اول:

$$F_Z(z) = P_r\{Z \leq z\} = P_r\{X + Y \leq z\}$$

$$= P_r\{(X,Y) \in A_z\}$$

$$= \iint_{A_z} \underbrace{f_{XY}(x,y)}_{f_X(x)\, f_Y(y)}\, dx\, dy$$



$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

راه حل دوم: از $\varphi_Z(\omega)$ کمک می‌گیریم.

$$\varphi_Z(\omega) = E e^{j\omega Z} = E e^{j\omega(X+Y)} = E e^{j\omega X} e^{j\omega Y} \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \underbrace{E e^{j\omega X}}_{\varphi_X(\omega)} \underbrace{E e^{j\omega Y}}_{\varphi_Y(\omega)}$$

$$\Rightarrow \varphi_Z(\omega) = \varphi_X(\omega)\,\varphi_Y(\omega) \Rightarrow \varphi_Z(-\omega) = \varphi_X(-\omega)\,\varphi_Y(-\omega)$$

$$\xRightarrow[\text{فوریه می‌گیریم}]{\text{از طرفین تبدیل}} f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

در ادامه می‌خواهیم برخی خصوصیات تابع مشخصه را یادآوری کنیم.

یادآوری برخی خصوصیات تابع مشخصه

در حالت کلی که تابع مختلط است $= E e^{j\omega X}$

1) $\forall \omega \; ; \quad |\varphi_X(\omega)| \leq \varphi_X(0) = E1 = 1$

2) $\dfrac{\partial^n}{\partial \omega^n} \varphi_X(\omega) \Big|_{\omega=0} = j^n E X^n$

یعنی با کمک $\varphi_X(\omega)$ می‌توان ممان‌های یک متغیر تصادفی را به دست آورد.

3) حقیقی $f_X(x) \implies \varphi_X(-\omega) = \varphi_X^*(\omega)$

تابع مشخصه تقارن هرمیتی خواهد داشت.

* تابع مولد احتمال — Probability generator function (pgf)

برای یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابع مولد احتمال به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Gamma_X(z) = E\, z^X = \sum_x \underbrace{P_X(x)}_{} z^x = \sum_i P_X(x_i)\, z^{x_i}$$

تابع جرم احتمال یا pmf متغیر تصادفی

$$f_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, \delta(x - x_i)$$

با توجه به تعریف $\Gamma_X(z)$ می توان نوشت

$$\Gamma_X(z^{-1}) \xleftrightarrow{ZT} P_X(x)$$

بنابراین از خصوصیات تبدیل Z می‌توان برای ساده‌تر کردن راه حل مسایلی که ممکن است با $P_X(x)$ راه حل طولانی داشته باشند، استفاده کرد. همچنین می‌توان خصوصیات آماری X را با کمک $\Gamma_X(z)$ استخراج کرد.

مثال - (تمرین) دو متغیر تصادفی گسسته و مستقل X و Y را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $T = X + Y$ تابع $P_T(t)$ را به دست بیاورید.

$$\Gamma_T(z) = \Gamma_X(z)\,\Gamma_Y(z)$$

$$\Longrightarrow \quad P_T(z) = P_X(x) * P_Y(y)$$

یادآوری برخی خصوصیات $\Gamma_X(z)$

1) $\Gamma_X(1) = E1 = 1$

2) $$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$$

ممان فاکتوریل مرتبه n ام متغیر تصادفی X

با کمک $\Gamma_X(z)$ می‌توان ممان‌های متغیر تصادفی X را به دست آورد

$$\frac{\partial}{\partial z}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = EX$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X(X-1) = EX^2 - EX \longrightarrow EX^2$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} P_X(z) = E\underbrace{X(X-1)(X-2)}_{X(X^2-3X+2)} = EX^3 - 3EX^2 + 2EX \longrightarrow EX^3$$

* به طریق مشابه، برای دو متغیر تصادفی X و Y نیز تابع مشخصه توأم (در حالت پیوسته) و تابع مولد احتمال توأم (در حالت گسسته) قابل تعریف است.

$$\varphi_{XY}(w_1, w_2) = E\, e^{jw_1X}\, e^{jw_2Y} = E\, e^{j(w_1X+w_2Y)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(w_1x+w_2y)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\boxed{\varphi_{XY}(-w_1,-w_2) \overset{FT}{\longleftrightarrow} f_{XY}(x,y)}$$

$$P_{XY}(z_1, z_2) = E\, z_1^X z_2^Y = \sum_{x_i}\sum_{y_i} z_1^{x_i} z_2^{y_i} P_{XY}(x_i, y_i)$$

$$\boxed{P_{XY}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \overset{ZT}{\longleftrightarrow} P_{XY}(x,y)}$$

یادآوری برخی خصوصیات $\varphi_{XY}(w_1, w_2)$ ، $\Gamma_{XY}(z_1, z_2)$

1) $$|\varphi_{XY}(w_1, w_2)| \leq \varphi_{XY}(0,0) = E1 = 1$$

$$\Gamma_{XY}(1,1) = E1 = 1$$

2) $$\frac{\partial^{n+m}}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \varphi_{XY}(w_1, w_2)\Big|_{w_1=w_2=0} = j^{n+m} E X^n Y^m$$

همان متقابل X و Y از مرتبه n نسبت به X و از مرتبه m نسبت به Y

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial z_1^n \partial z_2^m} \Gamma_{XY}(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=1} = E X(X-1)\cdots(X-n+1)\, Y(Y-1)\cdots(Y-m+1)$$

همان فاکتوریل متقابل از مرتبه n نسبت به X و از مرتبه m نسبت به Y

3)

$$\varphi_{xy}(w_1, w_2)\Big|_{\substack{w_1 = w \\ w_2 = 0}} = \varphi_{xy}(w, 0) = \varphi_x(w)$$

$$\varphi_{xy}(w_1, w_2)\Big|_{\substack{w_1 = 0 \\ w_2 = w}} = \varphi_{xy}(0, w) = \varphi_y(w)$$

$$\Gamma_{xy}(z_1, z_2)\Big|_{\substack{z_1 = z \\ z_2 = 1}} = \Gamma_{xy}(z, 1) = \Gamma_x(z)$$

$$\Gamma_{xy}(z_1, z_2)\Big|_{\substack{z_1 = 1 \\ z_2 = z}} = \Gamma_{xy}(1, z) = \Gamma_y(z)$$

4) $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \varphi_{XY}(w_1, w_2) = \varphi_X(w_1)\,\varphi_Y(w_2)$ (به عنوان تمرین نشان دهید)

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \Gamma_{XY}(z_1, z_2) = \Gamma_X(z_1)\,\Gamma_Y(z_2)$

$$\boxed{\varphi_{XY}(w_1, w_2) = E\, e^{jw_1 X}\, e^{jw_2 Y}}$$

در واقع یک شرط معادل دیگر برای استقلال دو متغیر تصادفی X و Y، تفکیک پذیر بودن توابع مشخصه توأم یا مولد احتمال توأم است.

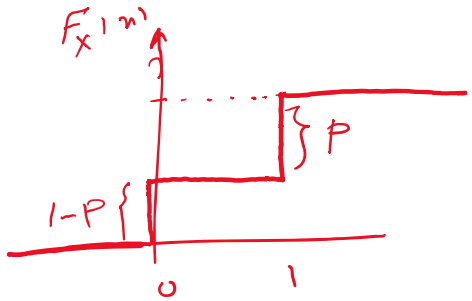
$\Leftarrow$ $\nexists$ شرط معادل برای استقلال دو متغیر تصادفی وجود دارد.

مثال 1 - متغیر تصادفی برنولی $X \sim Bernolli(p)$

متغیر تصادفی برنولی برای مدل سازی هر آزمایش تصادفی که فقط دو نتیجه ممکن داشته باشد، استفاده می شود. همچنین به صورت کلی تر می توانیم یک پیشامد مورد نظر با احتمال p را در نظر بگیریم و از متغیر تصادفی برنولی برای مدل سازی رخ دادن یا عدم رخ دادن آن پیشامد مورد نظر استفاده کنیم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \quad \text{(اگر پیشامد مورد نظر رخ دهد)} \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \quad \text{(" " " رخ ندهد)} \end{cases}$$

$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \end{cases}$$



$$f_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\,\delta(x - x_i) = (1-p)\,\delta(x) + p\,\delta(x-1)$$

$$EX = \sum_{x_i} x_i\, P_X(x_i) = 0 \times (1-p) + 1\,p = p = m_X$$

$$EX^2 = \sum_{x_i} x_i^2\, P_X(x_i) = 0^2(1-p) + 1^2\,p = p = P_X = r_X$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = EX^2 - E^2X = p - p^2 = p(1-p)$$

$$= E(X - m_X)^2$$

$$\Gamma_X(z) = \sum_{x_i} z^{x_i} P_X(x_i) = z^0(1-p) + z^1 p = zp + 1 - p$$

تمرین: ممان های اول و دوم متغیر تصادفی برنولی را با کمک $\Gamma_X(z)$ به دست بیاورید.

مثال 2 - متغیر تصادفی دوجمله‌ای $X \sim \text{Binomial}(n, p)$

متغیر تصادفی دوجمله‌ای X در ارتباط با آزمایش‌های تصادفی تکراری مستقل تعریف می‌شود و نشان دهنده تعداد رخ‌داد پیش‌آمد مورد نظر (احتمال رخ‌داد پیش‌آمد مورد نظر در یک آزمایش تصادفی $= p$) در n بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی است.

$$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \underbrace{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{(p+(1-p))^n}$$

ضرایب بسط دو جمله‌ای

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

* محاسبه ممان های اول و دوم

$$\overbrace{EX}^{m_X} = \sum_{x_i} x_i P_X(x_i) = \sum_{x_i=0}^{n} x_i \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np$$

$$EX^2 = \sum_{x_i} x_i^2 P_X(x_i) = \sum_{x_i=0}^{n} x_i^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p) + n^2p^2$$

برای به دست آوردن عبارت‌های مقابل باید از مشتق اول و دوم بسط دو جمله‌ای کمک بگیریم.

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E(x - m_x)^2 = EX^2 - E^2X = np(1-p)$$

راه حل دیگر برای به دست آوردن ممان های اول و دوم ، استفاده از تابع مولد احتمال است .

$$\Gamma_X(z) = E z^X = \sum_{x_i} z^{x_i} p_X(x_i) = \sum_{x_i=0}^{n} z^{x_i} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$$

$$\Gamma_X(z) = \sum_{x_i=0}^{n} \binom{n}{x_i} \underbrace{(zp)}_{a}^{x_i} \underbrace{(1-p)}_{b}^{n-x_i} = (a+b)^n = (zp+1-p)^n$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Gamma_X(z) \Big|_{z=1} = EX \implies \frac{\partial}{\partial z} (zp+1-p)^n \Big|_{z=1} = np(zp+1-p)^{n-1} \Big|_{z=1} = np$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Gamma_X(z) \Big|_{z=1} = EX(X-1) \implies n(n-1)p^2 (zp+1-p)^{n-1} \Big|_{z=1} = n(n-1)p^2$$

$$= EX^2 - EX$$

$$\implies EX^2 = \cdots \quad , \quad Var(X) = \cdots$$

راه حل دیگر: می‌دانیم هر آزمایش تصادفی در آزمایش‌های تصادفی تکراری مستقل را می‌توان با یک متغیر تصادفی برنولی مدل‌سازی کرد.

آزمایش i ام

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر پیش‌آمد مورد نظر رخ دهد} \quad (\text{با احتمال } p) \\ 0 & \text{. . . . . نرخ دهد} \quad (\text{با احتمال } 1-p) \end{cases}$$

می‌دانیم که متغیر تصادفی دوجمله‌ای نشان دهنده تعداد رخ‌دادهای پیش‌آمد مورد نظر در n بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی است. بنابراین داریم

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} p = np$$

امید ریاضی خطی است

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\mathbb{E}X_i = p$

$$\mathrm{Var}(X) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \ , \quad \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p)$$

$$\Gamma_X(z) \underset{\uparrow}{=} \Gamma_{X_1}(z)\,\Gamma_{X_2}(z) \dots \Gamma_{X_n}(z) = (zp + 1 - p)^n$$

$X = \sum X_i \ , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \ , \quad X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \qquad \Gamma_{X_i}(z) = zp + 1 - p$

تمرین: متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 و ... و X_n را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که

$$EX_i = m_{X_i} \quad , \quad Var(X_i) = \sigma^2_{X_i} \quad , \quad EX_iX_j = r_{X_iX_j} \quad , \quad C_{X_iX_j} = E\tilde{X}_i\tilde{X}_j$$

متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1) میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را به دست بیاورید.

2) اگر X_i ها توأماً مستقل باشند، میانگین و واریانس X را به دست بیاورید.