به نام زندگی

مثال: تخمین پارامتری

$$p_\theta(\underline{y}) = \theta^n e^{-n\theta\bar{y}} \longrightarrow \log p_\theta(\underline{y}) = n\ln\theta - n\theta\bar{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(\underline{y}) = \frac{n}{\theta} - n\bar{y} \quad , \quad \hat{\theta}_{ML}(\underline{y}) = \frac{1}{\bar{y}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} y_i$$

$$\left\{\frac{1}{\bar{y}}\right\} \longrightarrow \theta \quad : \quad \left\{\hat{\theta}_{ML}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \theta$$

Consistency خاصیت سازگاری در مورد تخمین ML

(مشاهدات iid)

* در ادامه می خواهیم بایاس تخمین را بررسی کنیم

$$E_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right\} = E_\theta\left\{\frac{1}{\bar{y}}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{y}}\, p_\theta(\underline{y})\, d\underline{y}$$

$$E\,\underbrace{g(\underline{x})}_{z} = \int g(\underline{x})\, f_{\underline{x}}(\underline{x})\, d\underline{x} = \int z\, f_z(z)\, dz$$

$$E\left\{\frac{1}{\bar{y}}\right\} = E\left\{\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} y_i}\right\} = E\left\{\frac{n}{\underbrace{y_1+y_2+\dots+y_n}_{x}}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{n}{x}\right\} = \int \frac{n}{x} f_x(x)\, dx$$

برای محاسبه‌ی امید ریاضی به تابع چگالی احتمال x نیاز داریم

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \quad , \quad Y_i \sim \text{iid} \, , \, \exp(\theta)$$

یکی از تکنیک‌های به دست آوردن تابع چگالی احتمال، این است که تابع مشخصه $\Phi_X(\omega)$ را پیدا کنیم، از $\Phi_X(-\omega)$ تبدیل فوریه بگیریم.

$$\Phi_X(-\omega) \xleftrightarrow{FT} f_X(x)$$

$$\Phi_X(\omega) = E\, e^{j\omega X} = E\, e^{j\omega \sum_{k=1}^{n} Y_i} = E \prod_{k=1}^{n} e^{j\omega Y_i}$$

$$\xrightarrow[y_i\ \text{بودن}]{iid} \quad \varphi_X(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{E\, e^{j\omega y_i}}_{\varphi_i(\omega)}$$

$$y_i \sim \exp(\theta) \xrightarrow[\theta e^{-\theta y_i}]{f_{y_i}(y_i)=} \varphi_{y_i}(\omega) = \frac{\theta}{\theta + j\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_X(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{\theta}{\theta + j\omega} \right) = \left( \frac{\theta}{\theta + j\omega} \right)^n$$

$$f_X(x) \longleftrightarrow \varphi_X(-\omega)$$

جدول تبدیل فوریه

$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = FT^{-1}\left\{ \left( \frac{\theta}{\theta - j\omega} \right)^n \right\}$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} \, x^{n-1} \, e^{-\theta x} \, u(x)$$

$$\Longrightarrow E_\theta\{\hat{\theta}_{ML}\} = E_\theta\left\{\frac{1}{\bar{y}}\right\} = E_\theta\left\{\frac{n}{X}\right\} = \int_0^\infty \frac{n}{x} f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow E_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}\right\} = \int_0^\infty \frac{n}{x}\,\frac{\theta^n}{(n-1)!}\,x^{n-1}\,e^{-\theta x}\,dx$$

$$= \frac{n\theta^n}{(n-1)!}\underbrace{\int_0^\infty x^{n-2}\,e^{-\theta x}\,dx}_{\frac{(n-2)!}{\theta^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow E_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}\right\} = \frac{n}{n-1}\,\theta \neq \theta$$

همان طور که می بینیم تخمین ML در حالت کلی یک تخمین بدون بایاس نیست. اما اگر $n \to \infty$ برقرار باشد می بینیم که

$$\lim_{n \to \infty} E_\theta \{ \hat{\theta}_{ML} \} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n-1} \theta = \theta$$

تخمین ML به صورت مجانبی بدون بایاس است. این خاصیت برای تمامی تخمین های ML با مشاهدات iid برقرار است.

Asymptotically unbiased

با توجه به اینکه $E\{\hat{\theta}_{ML}\} = \frac{n}{n-1}\theta$

برقرار است می توانیم با مقایسه کردن $\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})$ با یک ضریب

$\frac{n-1}{n}$ به یک تخمین گر بدون بایاس برسیم. $\hat{\theta}_u(\underline{y}) = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})$

$$\hat{\theta}_u(\underline{y}) = \frac{n-1}{\sum_{k=1}^{n} y_i}$$

برای اینکه بتوانیم مقایسه ای بین این دو تخمین داشته باشیم، ابتدا واریانس تخمین گر ML را به

درست بیاوریم.

$$\mathrm{Var}_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right\} = E_\theta\left\{\left(\hat{\theta}_{ML}(\underline{y}) - E_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right\}\right)^2\right\}$$

$$= E_\theta\, \hat{\theta}^2_{ML}(\underline{y}) - E^2_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right\}$$

$$= E_\theta\left\{\left(\frac{n}{X}\right)^2\right\} - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right) = \int_0^\infty \frac{n^2}{x^2}\frac{\theta^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\theta x}\,dx - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{n^2\theta^n}{(n-1)!}\underbrace{\int_0^\infty x^{n-3}e^{-\theta x}\,dx}_{\frac{(n-3)!}{\theta^{n-2}}} - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2\theta^2}{n-1}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_u(\underline{y})\right) = \mathrm{Var}_\theta\left(\frac{n-1}{n}\hat{\theta}_{ML}(\underline{y})\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_u(\underline{y})\right) = \frac{\theta^2}{n-2}$$

در ادامه می خواهیم کران نامساوی اطلاعات را برای این دو تخمین گر بررسی کنیم . برای تخمین گر $ML$ داریم (اطلاعات فیشر)

$$Var_\theta(\hat{\theta}) \geqslant \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta\{\hat{\theta}\}\right)^2}{I_\theta}$$

به عنوان تمرین به دست بیاورید

$$I_\theta = \overbrace{E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(y)\right)^2\right\} = -E_\theta\left\{\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p_\theta(y)}_{-\frac{n}{\theta^2}}\right\}}$$

شرط اینجا تعمیم نامساوی اطلاعات برقرار است

$$\Longrightarrow \quad I_\theta = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_{ML}(y)\right) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta\left\{\hat{\theta}_{ML}(y)\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n}{n-1}\theta\right) = \frac{n}{n-1}$$

کران نامساوی اطلاعات برای تخمین گر ML

$$\mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_{ML}\right) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta\{\hat{\theta}_{ML}\}\right)^2}{I_\theta}$$

$$\frac{n^2\,\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} > \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{n\theta^2}{(n-1)^2}$$

⇐ تخمین گر $ML$ به کران نامساوی اطلاعات نرسیده است و به اندازه‌ی ضریب $\frac{n}{n-2}$ با کران در حالت تساوی فاصله دارد.

اما اگر به صورت مجانبی به ازای $n \to \infty$ به نامساوی اطلاعات نگاه کنیم:

داریم

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(\hat{\theta}_{ML})\, I_\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} \frac{n}{\theta^2} = 1$$

یعنی تخمین‌گر ML به صورت مجانبی به کران نامساوی اطلاعات کرامر رائو می‌رسد.
به عبارت دیگر تخمین‌گر ML به صورت مجانبی کارا (efficient)

Asymtotically efficient

است.

* تخمین گردن با یاسی که به کران نامساوی اطلاعات می‌رسد را یک تخمین‌گر کارا یا efficient می‌گوییم.

* بدون محاسبه کران نامساوی اطلاعات نیز می‌توانیم تشخیص دهیم که یک تخمین گر به کران نامساوی اطلاعات می‌رسد یا خیر

یادآوری: شرط لازم و کافی برای رسیدن به کران نامساوی اطلاعات را به دست آورده‌ایم. این که $p_\theta(\underline{y}) = c(\theta)\, e^{g(\theta)T(\underline{y})} h(\underline{y})$ و $\hat{\theta}(\underline{y}) = T(\underline{y})$ برقرار باشد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(\underline{y}) = k(\theta)\left(\hat{\theta}(\underline{y}) - f(\theta)\right)$$

با توجه به آنچه برای تخمین گر ML به دست آوردیم، مشاهده می شود که شرط لازم و کافی برای رسیدن به کران نامساوی اطلاعات برقرار نیست.

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{\bar{y}} \quad , \quad T(\underline{y}) = \bar{y}$$

$$f(\theta) = \frac{n}{n-1}\theta \quad , \quad I_\theta = \frac{n}{\theta^2}$$

$$k(\theta) = \frac{I_\theta}{f'(\theta)} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(y) = \frac{n}{\theta} - n \cdot \bar{y}$$

در قسمت قبل واریانس تخمین‌گر بدون اریب $\hat{\theta}_n$ را به دست آوردیم.

$$\mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_n(\underline{y})\right) = \frac{\theta^2}{n-2}$$

حال می‌خواهیم کران نامساوی اطلاعات را برای این تخمین‌گر نیز بررسی کنیم. می‌دانیم که

$$I_\theta = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\mathrm{Var}_\theta\left(\hat{\theta}_u(y)\right) \geq \frac{1}{I_\theta}$$

$$\frac{\theta^2}{n-2} > \frac{\theta^2}{n}$$

تخمین‌گر $\hat{\theta}_u(y)$ نیز به کران نامساوی اطلاعات نمی‌رسد.