به نام خدا

فرآیندهای تصادفی

- فرآیندهای ارگودیک و فرآیندهای ایستان

فرآیند حالا را این فرآیند ارگودیک (Ergodic) می‌گوییم. اگر میانگین‌های آماری آن با میانگین‌های زمانی متناظر برابر باشند.

* منظور از میانگین آماری، همان امید ریاضی است.
* یادآوری مفهوم میانگین زمانی: اگر $g(t)$ یک تابع دلخواه از زمان باشد، میانگین زمانی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle g(t) \rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt$$

اگر $g(t)$ یک تابع پریودیک نسبت به زمان با دوره تناوب T باشد

بنابراین برای هر تابع دلخواه $g(\cdot)$ از فرآیند تصادفی $\eta(t)$ می‌توان میانگین زمانی را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\langle g(\eta(t)) \rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\eta(t))\,dt$$

(تابعیت از زمان t دارد چون میانگین‌گیری زمانی انجام شده است)

حال همان‌طور که گفتیم، فرآیند $\eta(t)$ را یک فرآیند ارگودیک می‌گوییم، اگر تمامی میانگین‌های زمانی آن با میانگین‌های آماری متناظر آن برابر باشند.

با توجه به اینکه برای یک فرآیند تصادفی میانگین‌های آماری متعدد و مختلفی قابل تعریف است، اگر ارگودیک بودن
می‌تواند، به مفهوم بسیار گسترده‌ای است.

$$\underbrace{\langle g(\overbrace{v(t)}^{v(t;\xi)}) \rangle_t}_{\text{میانگین زمانی}} \equiv \underbrace{E\{g(\overbrace{v(t)}^{v(t;\xi)})\}}_{\text{میانگین آماری}} = \text{اسکالر}$$

تابعیت از زمان ندارد و در حالت کلی تابع ξ است

تابعیت از ξ ندارد و در حالت کلی تابع t است

بنابراین برای اینکه رابطه بالا برقرار باشد، لازم است که میانگین‌های آماری زمانی مشابه، برابر با مقدار اسکالر
(میانگین آماری بر زمان بستگی نداشته باشد)
باشند.

با توجه به اینکه این مفهوم بسیار وسیع است و میانگین‌های متعددی را دربر گیرد، معمولاً ارگودیک بودن با مفاهیم بسیار تری تعریف می‌شود

مثلاً ارگودیک بودن در میانگین یا حالت اول که به آن Mean Ergodicity (ME) می‌گویند.

به طور کلی ارگودیسیتی فرآیند به ما کمک می‌کند که بتوانیم نتیجه‌گیری‌های آماری را به نتیجه‌گیری‌های زمانی تعمیم دهیم و بالعکس.

به عنوان مثال اگر در یک سیستم مخابراتی (با فرآیندهای ارگودیک)، SNR خروجی با احتمال ۹۰٪ بالاتر از ۱۰ dB باشد، می‌توان گفت که در ۹۰٪ زمان‌ها، SNR خروجی این سیستم بالاتر از ۱۰ dB است.

مثال: فرآیند تصادفی (سینوسی) $X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$ را در نظر بگیرید که در آن Φ یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$ است.

$\Phi \sim U(0, 2\pi)$ ← $f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

نشان دهید، میانگین آماری مرتبه اول رادرم نرا نده ا میانگین های زمانی متناظر، برابر هستند.

میانگین آماری مرتبه اول نرا نده

$$E\{v(t)\} = E\{a\cos(\omega t+\varphi)\} = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\varphi) f_\varphi(\varphi)\, d\varphi$$

$$= a\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\, d\varphi}_{0} = 0$$

$$\langle v(t)\rangle_t = \langle a\cos(\omega t+\varphi)\rangle_t = a\langle\cos(\omega t+\varphi)\rangle_t$$

$$= a\frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega t+\varphi)\, dt}_{0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad E\{v(t)\} = \langle v(t) \rangle_t$$

صنایعی که در تمرین آمده

$$E\{v^2(t)\} = E\{a^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\} = E\left\{\frac{a^2}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \underbrace{E\{\cos(2\omega t + 2\varphi)\}}_{\text{صفر به حالت کلی}} = \frac{a^2}{2}$$

$$\langle v^2(t) \rangle_t = \langle a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = a^2 \langle \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) \rangle_t$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \underbrace{\langle \cos(2\omega t + 2\varphi) \rangle_t}_{\text{صفر به حالت کلی}} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E\{v^2(t)\} = \langle v^2(t) \rangle_t = \frac{\sigma^2}{2}$$

$\Leftarrow$ اگر فرایند $v(t)$ ارگودیک باشد، میانگین‌های آماری آن تابعیت از زمان t ندارند.

* اگر میانگین خانه‌ای ارگودیک (فرایند تصادفی ارگودیک) داشته باشیم که داریم

$$E\{v(t)\} = \overline{v(t)} = m_v \quad , \quad Var(v(t)) = \sigma_v^2 \quad ; \quad \underline{E\{v^2(t)\} = \sigma_v^2 + m_v^2}$$

در این صورت تعبیرهای زیر را در مورد این سیگنال خواهیم داشت

۱- میانگین سیگنال $\underline{E\{v(t)\} = m_v}$ با مؤلفه DC سیگنال $\underbrace{\langle v(t) \rangle_t}$ برابر است.

نتیجه : مربع میانگین سیگنال با توان DC سیگنال برابر است.

$\underbrace{m_v^2}$ مربع میانگین سیگنال

$\underbrace{\langle v(t) \rangle_t^2}$ توان DC سیگنال

۲- میانگین مربع سیگنال با توان متوسط سیگنال برابر است.

$\underbrace{\in \{v^2(t)\}}$ میانگین مربع سیگنال

$\in \{\langle v^2(t) \rangle_t\} = \langle v^2(t) \rangle_t$ توان متوسط سیگنال

۳- واریانس سیگنال $v(t)$ یعنی σ_v^2 با توان AC سیگنال یعنی توان مولفه متغیر با زمان سیگنال برابر است

$$E\{v^2(t)\} = \sigma_v^2 + m_v^2$$

$$\Rightarrow \langle v^2(t) \rangle = \sigma_v^2 + m_v^2 = \text{توان متوسط سیگنال}$$

m_v^2 توان مولفه DC

نتیجه: انحراف از معیار سیگنال یعنی σ_x یا مقدار rms مولفه متغیر با زمان سیگنال برابر است.

در ادامه می خواهیم مفهوم ایستان بودن یک فرآیند را مطرح کنیم.

- ایستان بودن یک فرآیند (stationary)

یک فرآیند $x(t)$ را ایستان یا stationary می گوییم، اگر تمامی خصوصیات آماری آن مستقل از زمان (t) باشند. (به عبارت دیگر t شکلی نداشته باشند)

با توجه به اینکه خصوصیات آماری یک فرآیند بسیار گسترده هستند (شامل تمامی توابع احتمال و میانگین های آماری)، تعریف بالا بسیار گسترده است و چک کردن آن و پیدا کردن فرآیندی که چنین خصوصیی داشته باشد، کار بسیار سختی است

به همین دلیل تعریف ایستان بودن را با مفاهیمی محدود می کنند. در ادامه دو مفهوم ایستان بودن را که کاربرد بیشتری دارند مطرح خواهیم کرد.

۱- ایستان بودن به مفهوم وسیع (WSS) Wide-Sense stationary

فرآیند X(t) را فرآیند WSS می گوییم اگر حالت های اول و دوم آن با زمان تغییر نکنند یا به عبارت دیگر زمان نداشته باشند. با بیان ریاضی یعنی در شرط زیر برای فرآیند X(t) برقرار باشد.

حالت اول به زمان بستگی نداشته باشد

$$1)\quad E\{X(t)\} = m_X(t) = m_X$$

حالت دوم به مبدا زمان t بستگی نداشته باشد یا با زمان تغییر نکند

$$2)\quad R_X(\overbrace{t_1}^{t+\tau}, \overbrace{t_2}^{t}) = R_X(t_1 - t_2)$$

یا

$$R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$$

قرارداد: وقتی می‌گوییم که سیگنالی ایستان (یا ایستا یا ساکن) است، منظورمان این است که سیگنال WSS است. (اگر منظور نوع دیگری از ایستایی باشد، حتما ذکر می‌شود)

* سیگنال‌های WSS دارای خصوصیاتی هستند که در ادامه برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

1) $R_v(\tau) = E\{v(t+\tau)\,v(t)\} = E\{v(t)\,v(t-\tau)\}$

یعنی تابع همبستگی سیگنال‌های ایستان (WSS) دارای تقارن زوج است.

$\Rightarrow$ 2) $R_v(\tau) = R_v(-\tau)$

براساس نامساوی شوارتز

3) $|R_v(\tau)| \leq R_v(0)$

سه تابع همبستگی سیگنال‌های ایستان دارای تقارن زوج است. ماکزیمم آن‌ها ازای $\tau = 0$ رخ می‌دهد

یادآوری : نامساوی شوارتز

$$\left|E\,x(t_1)\,y^{*}(t_2)\right|^2 \le E\left|x(t_1)\right|^2 \; E\left|y(t_2)\right|^2$$

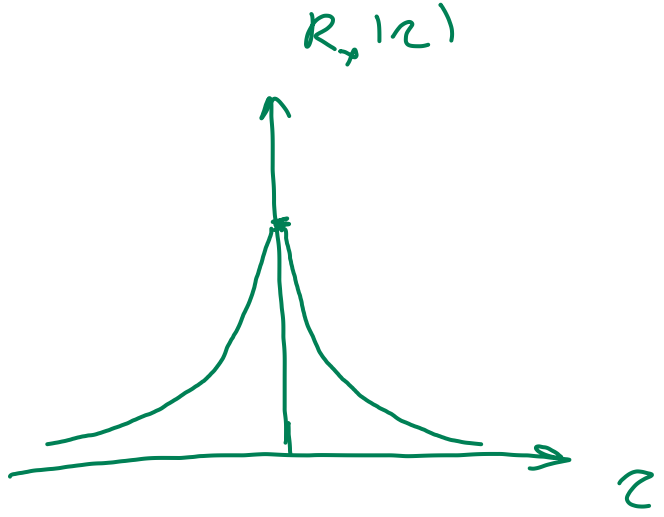
$y \to x$ (حقیقی)

$$\left|E\,x(t_1)\,x(t_2)\right|^2 \le E\,x^2(t_1)\;E\,x^2(t_2)$$

$$\left|R_x(t_1,t_2)\right|^2 \le R_x(t_1,t_1)\,R_x(t_2,t_2)$$

$x(t)$ استاتیک

$$\left|R_x(\tau)\right|^2 \le R_x(0)\,R_x(0) \quad \Longrightarrow \quad \left|R_x(\tau)\right| \le R_x(0)$$



به عنوان مثال $R_x(\tau)$ می‌تواند شکلی مشابه شکل مقابل داشته باشد.

4) قدرت لحظه‌ای فرآیند $P_v(t) = E\{v(t)\,v(t)\} = R_v(t,t) = R_v(0) \geq 0$

(فرآیند WSS)

قدرت فرآیند $P_v = \langle E\{v^2(t)\} \rangle_t = \langle R_v(0) \rangle = R_v(0)$

(فرآیند WSS)

⇐ برای فرآیندهای ایستان ، قدرت لحظه‌ای و قدرت فرآیند با هم برابر و برابر $R_x(0)$ است.

۲- ایستان بودن به معنای اکید / strict-sense stationary (sss)

فرآیند $x(t)$ را یک فرآیند sss می‌گوییم اگر توابع احتمال فرآیند با زمان تغییر نکند یا به عبارتی زمان مبنای نداشته باشد.

منظور از توابع احتمال یک فرآیند، توابع احتمال توام متغیرهای تصادفی آن فرآیند است که از مرتبه‌های مختلف (با ابعاد مختلف) قابل تعریف است.

* می دانیم که فرآیندهای گرسی با معلوم بودن حالت های اول و دوم به صورت کامل آماری مشخص هستند یعنی توابع احتمال فرآیند با معلوم بودن حالت اول و دوم برای ما به طور کامل مشخص می شود. بنابراین اگر یک فرآیند گوسی، WSS باشد، آنگاه SSS نیز هست.

* اگر یک فرآیند تصادفی دارای خصوصیت آماری ارگودیک باشد آنگاه دارای خصوصیت آماری ایستان نیز هست (یعنی آن خصوصیت آماری به زمان بستگی ندارد) (ولی نه برعکس)

در ادامه می خواهیم ضعیف (حالی ضعیف تر) یک فرآیند تصادفی را بررسی کنیم. برای سیگنال های قطعی، تبدیل فوریه سیگنال، اطلاعات فرکانسی کاملی را در اختیار ما قرار می دهد $g(t) \xleftrightarrow{FT} G(f)$

$$g(t) = \int G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$G(f) = \int g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$G(f)$ مؤلفه فرکانسی با فرکانس f

$g(t)$ مقدار مؤلفه فرکانسی در فرکانس f

اما در مورد یک فرآیند $x(t) = x(t;\xi)$ تبدیل فوریه نیز یک فرآیند تصادفی است که پارامتر زمان در آن به پارامتر فرکانس تبدیل می شود. بنابراین اطلاعات مرکانسی دقیقی به ما نمی دهد.

$$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(f) \quad ; \quad x(t;\xi) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(f;\xi)$$

فرآیند تصادفی با پارامتر زمان — فرآیند تصادفی با پارامتر فرکانس

تابعی که در مورد فرآیندهای تصادفی، اطلاعات کاملی در مورد نحوه توزیع توان فرآیند در فرکانس های مختلف را به ما می دهد، تابع چگالی طیف توان فرآیند است که در ادامه به معرفی آن می پردازیم.

در مورد توابع یقینی تابع چگالی طیف توان با توجه به تبدیل فوریه تابع مشخص می شود،

$G_T(f)$ تبدیل فوریه $g(t)$ است که بازه $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ محدود شده باشد.

$$S_g(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |G_T(f)|^2$$