به نام خدا

- کارآیی گیرنده‌ی بهینه برای مدولاسیون M-PSK

در مدولاسیون M-PSK می‌دانیم که سیگنال‌های ارسالی به صورت زیر می‌شوند:

$$S_m(t) = g(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_m), \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

$$S_m(t) = \mathrm{Re}\{\underbrace{g(t)\, e^{j\theta_m}}_{\text{سیگنال حامل باینری}}\, e^{j2\pi f_c t}\} \qquad \theta_m = \frac{2\pi}{M}(m-1)$$

$$S_m(t) = g(t)\cos\theta_m \cos 2\pi f_c t - g(t)\sin\theta_m \sin 2\pi f_c t$$

فضای سیگنال دو بعدی

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}}\, g(t)\cos 2\pi f_c t, \quad f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}}\, g(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow \underline{S}_m = \left[\sqrt{\frac{\epsilon_g}{2}} \cos\theta_m \;,\; \sqrt{\frac{\epsilon_g}{2}} \sin\theta_m \right]^T$$

سیگنال‌های هم‌انرژی

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_m = \epsilon = \epsilon_{av} = \frac{\epsilon_g}{2}$$

$$\epsilon_{b_{av}} = \frac{\epsilon}{\log_2^M} = \frac{\epsilon_g}{2\log_2^M}$$

$$d_{min} = \sqrt{\epsilon_g\left(1-\cos\frac{2\pi}{M}\right)} = \sqrt{2\epsilon_g \sin^2\frac{\pi}{M}} = \sqrt{4\log_2^M \sin^2\frac{\pi}{M}\,\epsilon_{b_{av}}}$$

$$\simeq 2\frac{\pi}{M}\sqrt{\log_2^M \epsilon_{b_{av}}}$$

$\sin\frac{\pi}{M} \simeq \frac{\pi}{M}$ ✓ // $\frac{\pi}{M}$ کوچک ↑ برای Mهای بزرگ :

در ادامه، می خواهیم کارایی گیرنده‌ی بهینه را برای سیستم M-PSK در حضور AWGN و با فرض هم احتمال بودن سمبل‌ها به دست بیاوریم.

برای این منظور لازم است که ابتدا مرزها و نواحی تصمیم‌گیری را برای گیرنده‌ی بهینه به دست بیاوریم و سپس با استفاده از رابطه‌ی احتمال خطا، احتمال پیش آمد خطا را حساب کنیم.

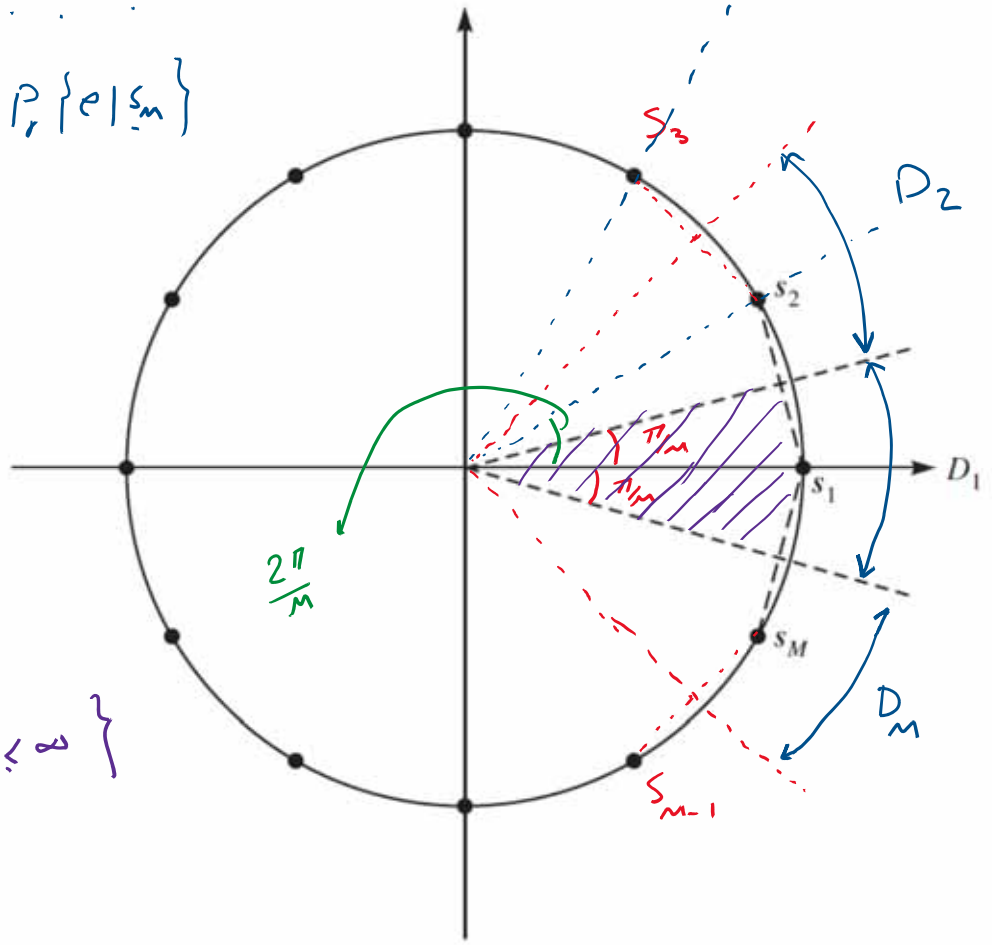
$$P_e = \sum_{m=1}^{M} P_m \, P_r\{e \mid s_m\} = \sum_{m=1}^{M} P_m \, P_r\{\underline{r} \notin D_m \mid \underline{s}_m\}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} P_r\{\underline{r} \notin D_m \mid \underline{s}_m\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \int_{\underline{r} \notin D_m} p(\underline{r} \mid \underline{s}_m) \, d\underline{r}$$

(هم احتمال بودن سمبل‌ها)

با توجه به تقارن مسأله، داریم:

$$P_r\{e|s_1\} = P_r\{e|s_2\} = \cdots = P_r\{e|s_M\}$$



$$D_1 : \left\{ -\frac{\pi}{M} \le \theta \le \frac{\pi}{M},\ 0 \le r \le \infty \right\}$$

به این ترتیب، کافی است که احتمال خطای شرطی را برای یکی از سیگنال‌ها $\{\underline{s}_m\}_{m=1}^{M}$ به دست بیاوریم.
برای سادگی، احتمال خطای شرطی به شرط ارسال $\underline{s}_1$ را به دست خواهیم آورد.

می‌دانیم،

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{\epsilon}, 0\right]^T$$

و

$$P_r\{e|\underline{s}_1\} = \int_{\underline{r}\notin D_1} p(\underline{r}|\underline{s}_1)\,d\underline{r} = 1 - \int_{\underline{r}\in D_1} p(\underline{r}|\underline{s}_1)\,d\underline{r}$$

برای سهولت احتمال خطا، کافی است که تابع چگالی احتمال $p(\underline{r}|\underline{s}_1)$ را به دست بیاوریم و انتگرال بالا را سهل کنیم.

فرض اینکه سیگنال $\underline{s}_1$ ارسال شده باشد، بردار دریافتی دریافت‌کننده به صورت زیر خواهد بود:

$$\underline{r} = \underline{s}_1 + \underline{n} \quad , \quad \underline{s}_1 = [\sqrt{\epsilon}, 0]^T \quad , \quad \underline{n} = [n_1, n_2]^T$$

$$\Rightarrow [r_1 \quad r_2]^T = [\sqrt{\epsilon}, 0]^T + [n_1 \quad n_2]^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{\epsilon} + n_1 \\ r_2 = n_2 \end{cases} \quad , \quad n_1 \perp\!\!\!\perp n_2 \quad , \quad n_1, n_2 \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$$

$$\Rightarrow P(\underline{r} \mid \underline{s}_1) = P(r_1, r_2 \mid \underline{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \frac{N_0}{2})^2}} \exp\left(-\frac{\|\underline{r} - \underline{s}_1\|^2}{N_0}\right)$$

$$\Longrightarrow P(\underline{r}\,|\,\underline{s}_1) = \frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{\|\underline{r}-\underline{s}_1\|^2}{N_0}\right) = \frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(r_1-\sqrt{\epsilon})^2+r_2^2}{N_0}\right)$$

هم احتمال بودن

$$\Longrightarrow P_e = P_r\{e\,|\,\underline{s}_1\} = \cdots = P_r\{e\,|\,S_m\} = 1-\int_{r\in D_1} P(\underline{r}\,|\,\underline{s}_1)\,d\underline{r}$$

سیگنالها

تقارن مسأله

$$\Longrightarrow P_e = 1-\int_{r\in D_1}\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(r_1-\sqrt{\epsilon})^2+r_2^2}{N_0}\right)dr_1\,dr_2$$

با توجه به ساختار ناحیه‌ی D_1، محاسبه‌ی انتگرال بالا بر روی مختصات قطبی خیلی راحت‌تر از مختصات کارتزین است. بنابراین با تغییر متغیر به صورت زیر، از مختصات کارتزین به مختصات قطبی می‌رویم.

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} \qquad (*)$$

$r_1 = r\cos\theta \ , \quad r_2 = r\sin\theta$

$$\Rightarrow P_e = 1 - \int_{\underline{r} \in R_1} p(\underline{r}|s_1)\, d\underline{r} = 1 - \int_{\underline{r} \in D_1} \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{\overbrace{r_1^2 + \epsilon - 2r_1\sqrt{\epsilon}}^{(r_1-\sqrt{\epsilon})^2} + r_2^2}{N_0}\right) dr_1\, dr_2$$

$$= \overset{\text{تغییر متغیر}}{\uparrow} 1 - \int_{\theta=-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{r^2 + \epsilon - 2\sqrt{\epsilon} r\cos\theta}{N_0}\right) r\, dr\, d\theta$$

(*)

$$D_1 = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \le r < \infty \ , \ -\frac{\pi}{M} \le \theta \le \frac{\pi}{M} \right\}$$

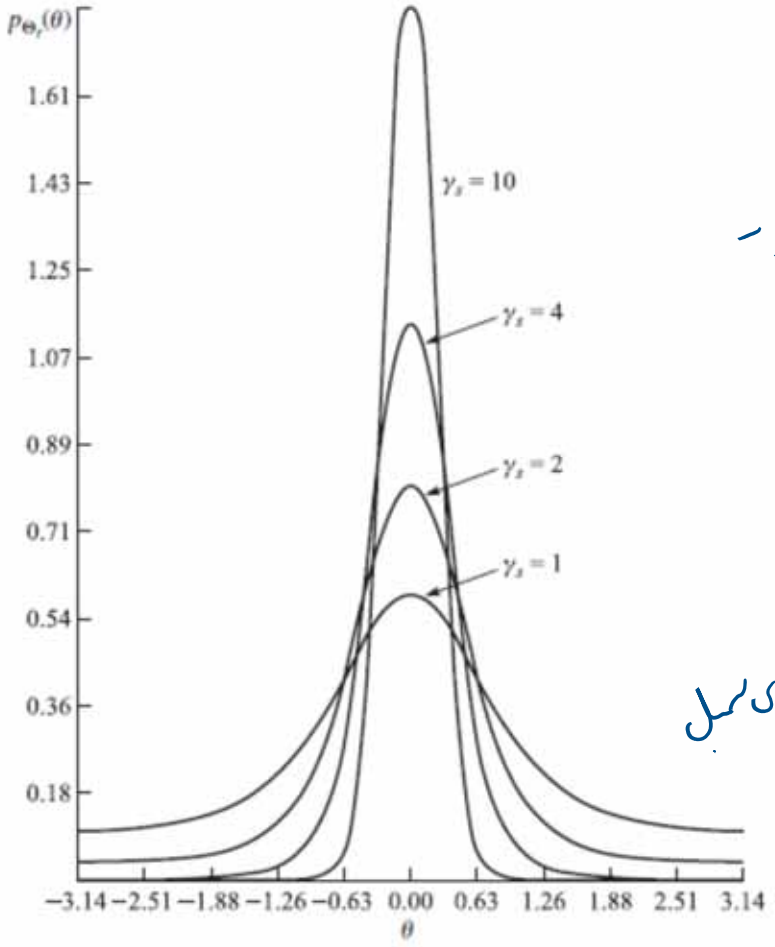
$$\Longrightarrow P_e = 1 - \int_{\theta=-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} \underbrace{\left[\int_{v=0}^{\infty} \frac{v}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{v^2+\epsilon-2\sqrt{\epsilon}\cos\theta}{\pi N_0}\right) dv \right]}_{P_\theta(\theta)} d\theta$$

$$\Longrightarrow P_e = 1 - \int_{\theta=-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} P_\theta(\theta)\, d\theta$$

که در آن

$$P_\theta(\theta) = \int_0^\infty \frac{v}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{v^2+\epsilon-2\sqrt{\epsilon}\cos\theta}{N_0}\right) dv \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma_s \sin^2\theta} \int_0^\infty v' \exp\left(-\frac{(v'-\sqrt{2\gamma_s}\cos\theta)^2}{2}\right) dv' \quad (1)$$

$$v' = \frac{v}{\sqrt{N_0/2}}, \quad \gamma_s = \frac{\epsilon}{N_0} \quad (\text{SNR/symbol})$$

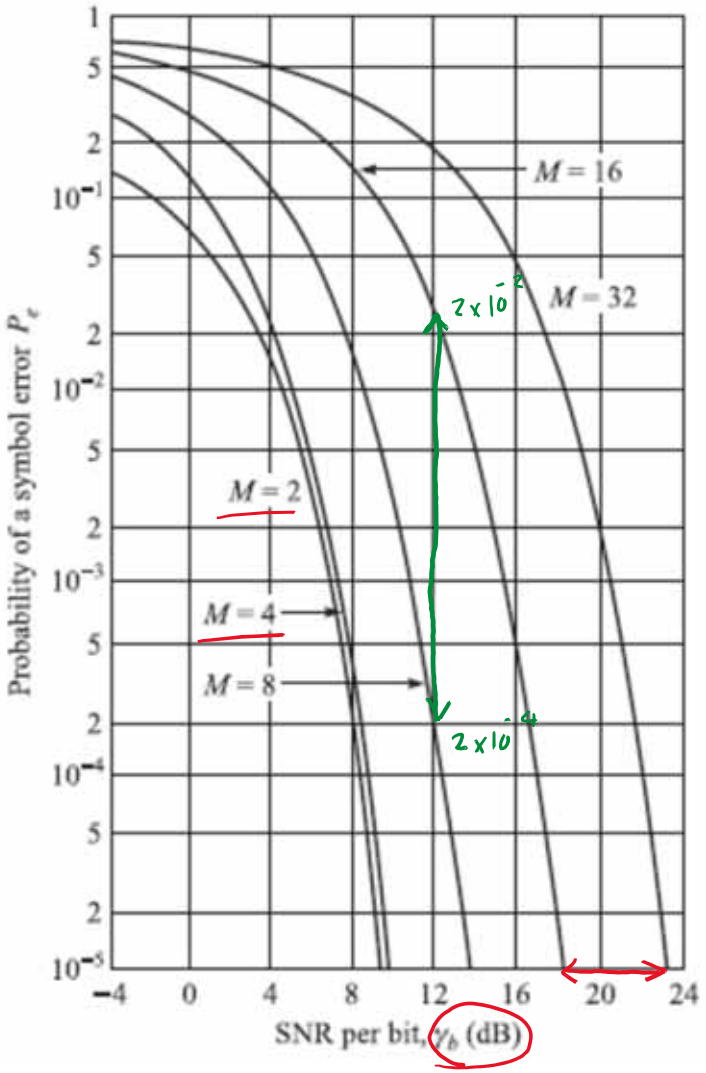


$P_\theta(\theta)$ از رابطه‌ی (1) قابل محاسبه است. این تابع را به ازای مقادیر مختلف γ_s در شکل مقابل می‌بینید. هرچه γ_s بیشتر باشد، $P_\theta(\theta)$ بلندتر و باریکتر خواهد بود (انحراف معیار کمتری خواهد داشت)

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} P_\theta(\theta)\, d\theta$$

احتمال خطای سمبل در مدولاسیون M-PSK

این احتمال خطا به فرم بسته قابل محاسبه نیست.



همان طور که گفتیم رابطه‌ی احتمال خطا برای مدولاسیون M-PSK به فرم بسته قابل محاسبه نیست. شکل مقابل احتمال خطای مدولاسیون M-PSK را که از محاسبات عددی به دست آمده‌اند، نشان می‌دهد.

* همان طور که دیده می‌شود، با افزایش M، کارآیی احتمال خطای سیستم افت پیدا می‌کند. به طور مثال در احتمال خطای 10^{-5} به ازای دو برابر شدن M، تقریبا به مقدار 6dB افت عملکرد داریم. یعنی برای اینکه احتمال خطا ثابت باقی بماند باید γ_b در حدود 6dB افزایش پیدا کند. (برای M=2 به M=4 حالت استثنا وجود دارد زیرا M=2 حالت باینری و یک بعدی است)

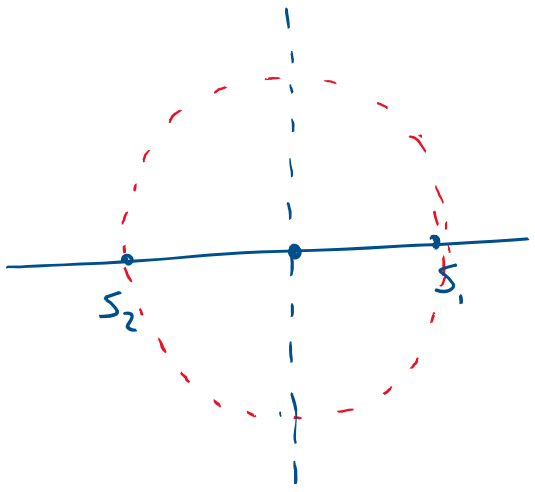
* برای حالت های $M=2$ و $M=4$ می توانیم احتمال خطای مدولاسیون PSK را به صورت دقیق محاسبه کنیم

- برای $M=2$ حالت باینری را احتمال در حضور AWGN

$$P_e = Q\left(\frac{d_{12}/2}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\epsilon_b}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{\epsilon_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

حالت Antipodal

$d_{12} = 2\sqrt{\epsilon_b}$

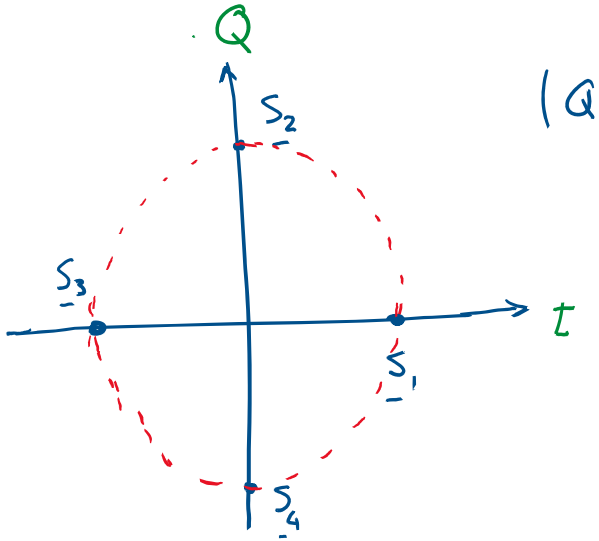


- برای $M=4$ حالت $4-PSK$ یا $Q-PSK$ ، منظومه‌ی سیگنال به صورت زیر است.

در این حالت مدولاسیون QPSK را می‌توان ترکیب

دو مدولاسیون B-PSK روی مؤلفه‌های Quadrature در نظر

گرفت. (یک BPSK روی مؤلفه‌ی I و یک BPSK روی مؤلفه‌ی Q)



- این ترتیب خطاهای رخ می‌دهد که دست کم یکی از مؤلفه‌های

I و Q به صورت خطا دار آشکارسازی شوند.

(یعنی یا مؤلفه‌ی I یا مؤلفه‌ی Q یا هردو مؤلفه)

با توجه به اینکه محاسبه احتمال خطای پیش آمده بالا، طولانی است، برای راحت‌تر شدن محاسبات، احتمال آشکارسازی

درست را می‌سنجیم. یعنی احتمال اینکه سمبل I و سمبل Q هردو به‌صورت درست آشکارسازی شوند.

$$P_e = 1 - P_c$$

↑ احتمال خطا

↑ احتمال آشکارسازی درست

$$P_c = P_r\{\text{سمبل } I \text{ و سمبل } Q \text{ به‌صورت درست آشکارسازی شوند}\} = P_{c_I} P_{c_Q} = (1 - P_{e_I})(1 - P_{e_Q})$$

$$P_{e_I} = P_{e_Q} = Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right) \longrightarrow P_c = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow P_e = 1 - P_c = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right)\left[2 - Q\left(\sqrt{\frac{\epsilon_b}{N_0}}\right)\right] = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right)\left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\epsilon_b}{N_0}}\right)\right]$$

با توجه اینکه داشتن P_e کران به صورت ساده برای احتمال خطای مدولاسیون M-PSK لازم است،

برای $\gamma_s >> 1$ یک رابطه‌ی تقریبی برای $P_\theta(\theta)$ به دست آمده است که با کمک آن می‌توانیم

احتمال خطای مدولاسیون M-PSK را به فرم ساده (به صورت تقریبی) به دست بیاوریم.

رابطه‌ی تقریبی $P_\theta(\theta)$ به صورت زیر است.

$$P_\theta(\theta) \cong \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}}\cos\theta\, e^{-\gamma_s \sin^2\theta}$$

به این ترتیب، احتمال خطای مدولاسیون M-PSK به صورت تقریبی زیر قابل محاسبه است.

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} P_\theta(\theta)\, d\theta \cong 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}} \cos\theta\, e^{-\gamma_s \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma_s}{2}}\sin\frac{\pi}{M}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 1 - 2\int_0^{\sqrt{\frac{\gamma_s}{2}}\sin\frac{\pi}{M}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

$u = \sqrt{\frac{\gamma_s}{2}} \sin\theta$

$du = \sqrt{\frac{\gamma_s}{2}} \cos\theta$

عبارت احتمال خطا به صورت $Q(\cdot)$ قابل بیان خواهد بود.

$$P_e \cong 2Q\left(\sqrt{2\gamma_s \sin^2\frac{\pi}{M}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\log_2^M \sin^2\frac{\pi}{M}\, \gamma_b}\right)$$

مشابه عبارت برحسب γ_b

جزئیات روابط به عنوان تمرین

$$P_e \simeq 2Q\left(\sqrt{2\log_2^M \sin^2\frac{\pi}{M}\ \gamma_b}\right)$$

برای M های بزرگ $\sin\frac{\pi}{M} \simeq \frac{\pi}{M}$

$$M=2 \longrightarrow P_e \simeq 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

$$M=4 \longrightarrow P_e \simeq 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

در حالت $M=2$ و $M=4$ احتمال خطای مدولاسیون خیلی به هم نزدیک هستند. در نمودار دقیق محاسبه شده به صورت عددی نیز، این مطلب دیده می‌شود.

* در مدولاسیون های M-ASK و M-PSK در صورتی که از Gray Coding برای تخصیص بیت های ورودی به سمبل های مدولاسیون استفاده کنیم و خطای غالب را در سیستم، خطا از یک

سطح به سطح مجاور در نظر بگیریم (از بقیه‌ی خطاها صرف‌نظر کنیم) می‌توانیم رابطه‌ی تقریبی زیر را برای احتمال خطای بیت در نظر بگیریم.

احتمال خطای سمبل

$$P_{e_b} \simeq \frac{P_e}{k} = \frac{P_e}{\log_2 M}$$

احتمال خطای بیت

(به ازای هر خطای سمبل فقط یک بیت در سمبل خطا دارد)

- کارآیی گیرنده‌ی بهینه برای مدولاسیون M-QAM در حضور AWGN

سیگنال‌های ارسالی در مدولاسیون M-QAM به صورت زیر هستند.

$$s_m(t) = A_{m_I}\, g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{m_Q}\, g(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{(A_{m_I} + jA_{m_Q})}_{r_m e^{j\theta_m}}\, g(t)\, e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

سگنال دوبعدی

$$= s_{m_1} f_1(t) + s_{m_2} f_2(t)$$

کدینگ

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_g}}\, g(t)\cos 2\pi f_c t \quad , \quad f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\epsilon_g}}\, g(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\underline{s}_m = \left[\sqrt{\frac{\epsilon_g}{2}}\, A_{m_I} \quad \sqrt{\frac{\epsilon_g}{2}}\, A_{m_Q} \right]^T \quad ,$$

$$A_{m_I}, A_{m_Q} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)\}d$$

همان طور که اشاره کردیم، مدولاسیون M-QAM به صورت ترکیب ASK/ASK کاربرد بیشتری دارد. بنابراین روابط فاصله های اقلیدسی را در این حالت به دست آوردیم و برای حالت مربعی (حالتی که M توان زوجی از 2 باشد) رابطه‌ی d_{min} برحسب ϵ_{bav} را به دست آوردیم.

$$d_{min} = d\sqrt{2\epsilon_g} = \sqrt{\frac{6\log_2 M}{M-1}\,\epsilon_{bav}}$$

مربعی (M توان زوجی از 2 است)

در ادامه، احتمال خطای M-QAM را برای حالتی که M توان زوجی از 2 است (مستطیلی) به دست می آوریم و رابطه را برای توان های فرد 2 نیز به صورت تقریبی، استفاده می کنیم.

در حالتی که M توان زوجی از 2 است، مدولاسیون M-QAM را می‌توان به صورت ترکیب دو مدولاسیون $\sqrt{M}$-ASK / $\sqrt{M}$-ASK اردی مؤلفه‌های I و Q در نظر گرفت.

در این حالت خطا زمانی رخ می دهد که دست کم یکی از مؤلفه های I یا Q به صورت خطا از آشکارساز شده باشند (یعنی مؤلفه‌ی I خطا داشته باشد یا مؤلفه‌ی Q خطا داشته باشد یا هر دو مؤلفه خطا دار)

برای سادگی محاسبات، احتمال آشکارسازی درست را به درست می آوریم یعنی احتمال اینکه هر دو مؤلفه‌ی I و Q به صورت درست آشکارسازی شوند.

$$P_c = P_{c_I} P_{c_Q} \quad \text{و} \quad P_{c_{M\text{-}QAM}} = P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK_I}} P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK_Q}}$$

از طرف دیگر داریم.

$$P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK_I}} = P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK_Q}} = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK}}$$

$$P_e = 1 - P_c = 1 - \left(P_{c_{\sqrt{M}\text{-}ASK}}\right)^2 = 1 - \left[1 - P_{e_{\sqrt{M}\text{-}ASK}}\right]^2$$

$$= P_{e_{\sqrt{M}\text{-}ASK}} \left(2 - P_{e_{\sqrt{M}\text{-}ASK}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_{e_{M\text{-}QAM}} = 2\, P_{e_{\sqrt{M}\text{-}ASK}} \left(1 - \frac{1}{2} P_{e_{\sqrt{M}\text{-}ASK}}\right)$$

$$= 2 \times 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)\right]$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)\right]$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \gamma_{b_{av}}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \gamma_{b_{av}}}\right)\right]$$

$\uparrow$

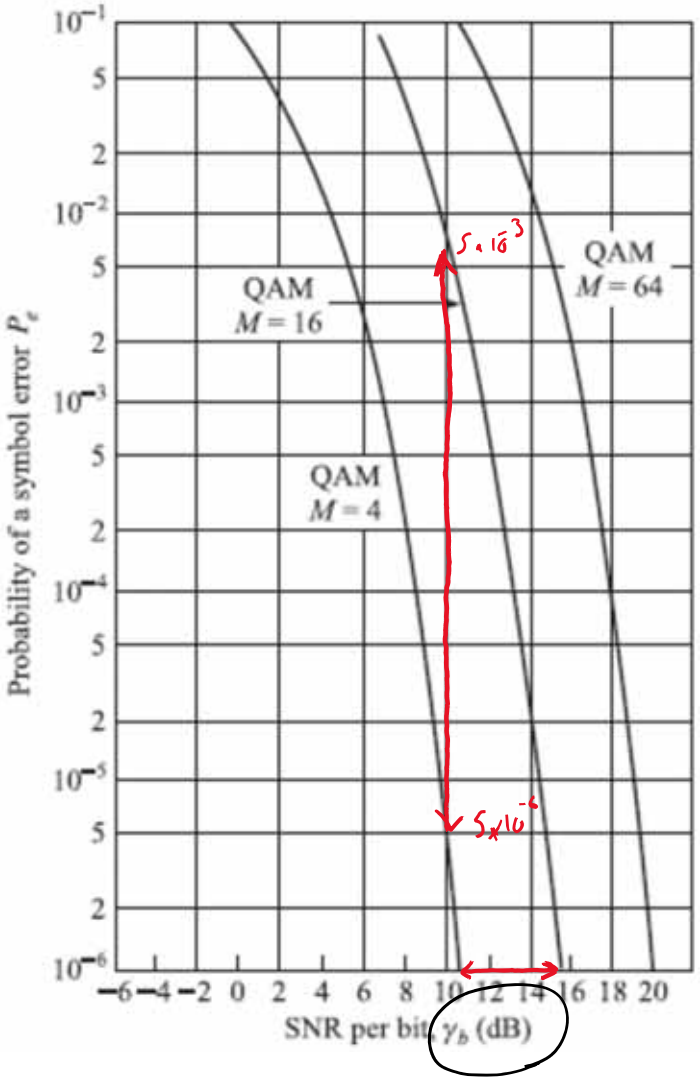
$$d_{min} = \sqrt{\frac{6\log_2 M}{M-1} \mathcal{E}_{b_{av}}}$$

رابطه‌ی احتمال خطا برای M های بزرگ به صورت زیر تقریب زده می‌شود،

$$P_{e_{M\text{ بزرگ}}} \simeq \underbrace{4Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2^M}{M-1}\gamma_{b_{av}}}\right)}_{\text{به عنوان کران بالای احتمال خطای}}$$

M-QAM قابل استفاده است

$$P_{e_{M\text{-QAM}}} \leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2^M}{M-1}\gamma_{b_{av}}}\right)$$



احتمال خطای M-QAM را به ازای M های مختلف در شکل مقابل به صورت دقیق می‌توانیم مشاهده کنیم.

رابطه‌ی به دست آمده برای حالت مربعی (توان زوج از 2) برای M هایی که توان فردی از 2 هستند نیز، با دقت خوبی قابل استفاده است.

همان طور که می‌بینیم در مدولاسیون M-QAM نیز با افزایش M، افت کارایی احتمال خطا دیده می‌شود

در مدولاسیون M-QAM به ازای دو برابر شدن M تقریباً

3dB افت عملکرد داریم. در مقایسه با M-ASK و M-PSK که به ازای دو برابر شدن M ،
تقریباً 6dB افت عملکرد در حدود داشت، می‌توان گفت که مدولاسیون M-QAM کارایی
احتمال خطای بهتری دارد. به همین جهت در بیشتر کاربردهای سیستم های کابرای پرسرعت،
معمولاً از مدولاسیون M-QAM استفاده می‌شود.

* در عوض مدولاسیون M-PSK یک مدولاسیون با پوش سیگنال مدوله شده‌ی ثابت است که
طراحی بلوک های تقویت‌کننده، در ابعاد IF و RF را ساده‌تر می‌کند.

به همین منظور یک مقایسه بین عملکرد M-QAM و M-PSK انجام شده است که طراحان

کمک می کند براساس فاکتورهای پیچیدگی و کارایی، بتوانند مدولاسیون مناسب با وضعیت سیستم را انتخاب کنند.

$$P_{e_{M\text{-}PSK}} \simeq 2Q\left(\sqrt{\underbrace{2\log_2 M \sin^2\frac{\pi}{M}}_{\alpha}\,\gamma_{b_{av}}}\right)$$

$$P_{e_{M\text{-}QAM}} \simeq 4Q\left(\sqrt{\underbrace{\frac{3\log_2 M}{M-1}}_{\beta}\,\gamma_{b_{av}}}\right)$$

با توجه به بزرگی برای $Q(.)$

$$R_{QAM/PSK} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{3}{M-1}}{2\sin^2\frac{\pi}{M}}$$

هرچه R بزرگتر باشد، برتری $M\text{-}QAM$ نسبت به $M\text{-}PSK$ از نظر کارایی احتمال خطا، بیشتر است.

به ازای M های مختلف، مقدار $R_{QAM/PSK}$ مطابق جدول زیر است:

M	$10\log R$
4	0 $(R=1)$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

همان طور که می‌بینیم با افزایش M،

عملکرد M-QAM نسبت به M-PSK

از نظر احتمال خطای آشکارسازی، بالاتر است

در ادامه‌ی بحث، سیگنالینگ با ابعاد بالاتر از 2 (سیگنالینگ با توان محدود) را از نظر کارآیی احتمال خطای گیرنده‌ی بهینه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تمرین شبیه‌سازی ۳: سیستم مدولاسیون M-QAM را در حضور AWGN در نرم‌افزار MTLAB یا Python شبیه‌سازی کنید و نمودار کارآیی احتمال خطا را رسم کنید و با حدود تئوری مقایسه و بحث کنید.

لینک کلاس ضبط شده جلسه ۱۳/۳/۹۹

https://lms۸srbiau.ac.ir/phnsm.۴dme۷t۷OWASP_CSRFTOKEN=e?/۲e۷۷b۰ae۵۳۱۲b۸d۰۶۹ef۵d۸۷۱۳۵۷۷b۱۷a۲۷۷f۹۴fd۳۵۹۹d۳۹۸fd۶۵۲cd۳eb۸۴۷۷