به نام خدا

* سفید کردن بردارهای تصادفی

$\underline{X}$: $\underline{m}_X$, $C_{\underline{x}}$ $\xrightarrow[\text{سفید کردن}]{\text{تبدیل خطی}}$ $\underline{W}$: $m_{\underline{W}} = \underline{0}$, $C_{\underline{W}} = R_{\underline{W}} = I$

whitening

$$\underline{W} = A\,\underline{X} + \underline{b} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{b} = -A\,\underline{m}_{\underline{x}} \\ C_{\underline{x}} = A^{-1}A^{-H} \\ C_{\underline{W}} = A\,C_{\underline{x}}\,A^{H} \end{cases}$$

$C_{\underline{x}} = L\,L^{H} \rightarrow A = L^{-1} = \Gamma$

عملیات برگشت پذیر

$\underline{W} = \Gamma\,(\underline{X} - \underline{m}_{\underline{x}}) \Longrightarrow \underline{X} = L\,\underline{W} + \underline{m}_{\underline{x}}$

عملیات ابداع : عکس عملیات سفید کردن

در عملیات سفید کردن و ابداع لازم است به نکات زیر توجه داشته باشیم.

۱- به یاد داریم که در روند به دست آوردن ماتریس A و بردار b به رابطه‌ی

$$\underbrace{C_{\underline{W}}}_{I} = A C_{\underline{X}} A^{H}$$

رسیدیم و سپس طرفین عبارت از سمت چپ در A^{-1} و از سمت راست در A^{-H} ضرب کردیم و به این نتیجه رسیدیم که

$$C_x = A^{-1} A^{-H} \equiv L L^{H} \rightarrow A^{-1} = L$$

(C_x: تجزیه)

در این راستا باید توجه داشته باشیم، برای اینکه عملیات بالا امکان پذیر باشد، لازم است که ماتریس A معکوس پذیر باشد. به عبارت دیگر برای اینکه عملیات سفید کردن برای بردار تصادفی $\underline{X}$ امکان پذیر

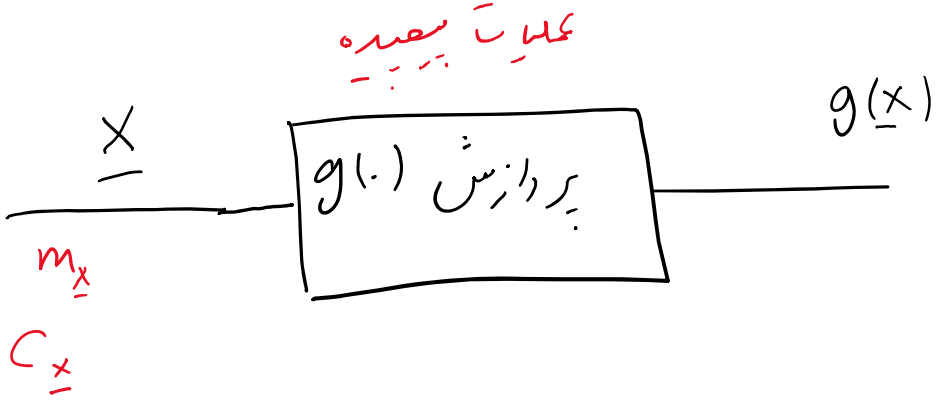
باشد، این است که ماتریس L، معکوس پذیر باشد یا به طور معادل، ماتریس C_x معکوس پذیر باشد. یعنی

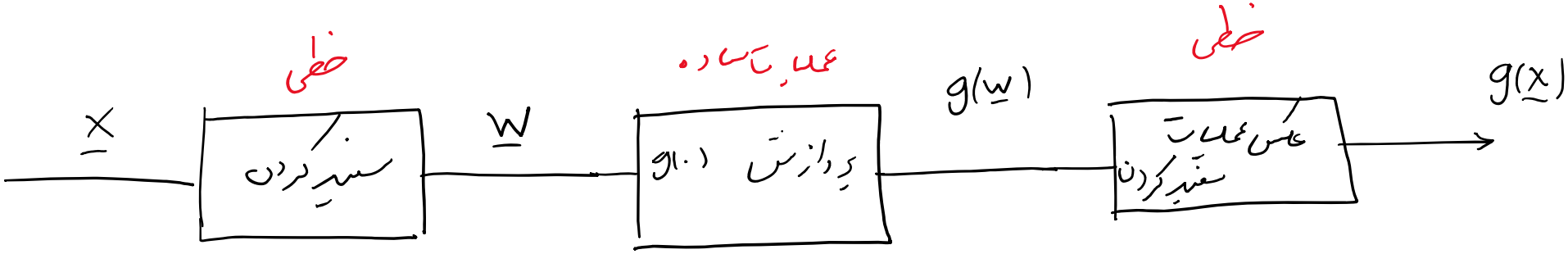
$$\det L \neq 0 \quad \text{یا} \quad \det C_x \neq 0$$

$$\det C_x = \det LL^H = \det L \det L^H = \det L (\det L)^H = |\det L|^2$$

* از طرف دیگر می‌دانیم که اگر برای بردار تصادفی $\underline{X}$ داشته باشیم $\det C_x = 0$ به معنی این است که یک رابطه خطی (مستوی) بین عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ وجود دارد. بنابراین با یک عملیات خطی به صورت $A\underline{X} + \underline{b}$ نمی‌توان بردار تصادفی $\underline{X}$ را سفید کرد و عناصر آن را به صورت ناهمبسته درآورد.

۴- همان طور که اشاره شد، کار کردن با بردارهای تصادفی سفید نسبت به بردارهای تصادفی رنگی ساده‌تر است چون عناصر بردار تصادفی سفید، از نظر آماری مستقل و ناهمبسته هستند.





* اگر برای بردار تصادفی $\underline{X}$ داشته باشیم $\det C_{\underline{X}} = 0$ یعنی یک رابطه خطی (مستقل) بین عناصر بردار $\underline{X}$ وجود دارد و با عملیات خطی نمی‌توانیم عناصر بردار $\underline{X}$ را ناهمبسته کنیم و از مزایای سفید کردن استفاده کنیم. در این حالت می‌توانیم با استخراج رابطه خطی بین عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ و بیان یکی از عناصر بر حسب بقیه عناصر بردار $\underline{X}$ و حذف آن از بردار $\underline{X}$، عناصر باقی مانده را سفید کنیم و از مزایای سفید کردن بردارهای تصادفی استفاده کنیم.

به دست آمدن بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر

$$\det C_{\underline{X}} = 0 \xrightarrow[\text{مقادیر ویژه ماتریس } C_{\underline{X}}]{\text{به دست آوردن}} C_{\underline{X}}\,\underline{v} = 0\,\underline{v} = \underline{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{v}^H \underline{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1^* X_1 + v_2^* X_2 + \cdots + v_n^* X_n = 0$$

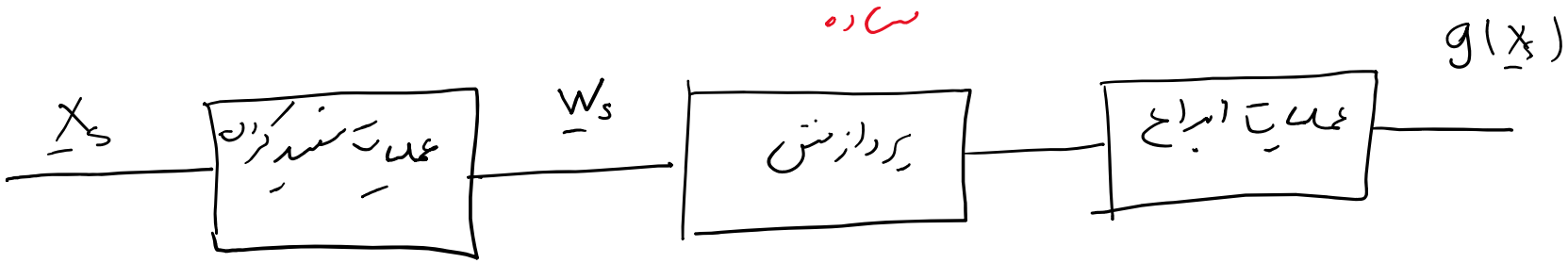
$$X_1 = \frac{-1}{v_1^*}\left(v_2^* X_2 + v_3^* X_3 + \dots + v_n^* X_n\right)$$

$v_1 \neq 0$

$$C_X = \begin{bmatrix} C_{X_1} & C_{X_1X_2} & \cdots & C_{X_1X_n} \\ C_{X_2X_1} & C_{X_2} & \cdots & C_{X_2X_n} \\ \vdots & & & \\ C_{X_nX_1} & C_{X_nX_2} & \cdots & C_{X_n} \end{bmatrix}$$

$C_{\underline{X}_s}$

$\xrightarrow[\text{بردار تصادفی } X]{\text{حذف } X_1 \text{ از}}$ $\underline{X}_s = [X_2 \; X_3 \; \dots \; X_n]^T$, $\det C_{\underline{X}_s} \neq 0$



$$X_1 = \frac{-1}{v_1^*}\left(v_2^* X_2 + \dots + v_n^* X_n\right) \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \quad g(X_1)$$

۳- همان طور که اشاره کردیم، تجزیه $C_{\underline{X}}$ به فرم $C_{\underline{X}} = LL^H$ جواب منحصر به فرد ندارد و از بین جواب های مختلفی که برای این تجزیه وجود دارد، جواب پایین مثلثی اهمیت ویژه ای دارد. در کتب سفید کردن، جواب پایین مثلثی یک پایه علی برای عملیات سفید کردن و ابداع زیر به دست می آید.

$$C_{\underline{X}} = LL^H \equiv A^{-1}A^{-H} \quad \Rightarrow \quad A = L^{-1}$$

$$\underline{W} = L^{-1}(\underline{X} - m_{\underline{X}}) \quad , \quad \underline{X} = L\underline{W} + m_{\underline{X}}$$

جواب پایین مثلثی برای تجزیه C_x (تجزیه چولسکی) به فرم زیر است.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & O \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس L پایین مثلثی باشد
ماتریس L^T نیز پایین مثلثی است.

برای اینکه علتی بودن این جواب را ببینیم، عملیات ابداع را در نظر می‌گیریم

$$\underline{X} = L\underline{W} + \underline{m}_x \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & O \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \vdots \\ m_{x_n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = l_{11} w_1 + m_{x_1} \\ X_2 = l_{21} w_1 + l_{22} w_2 + m_{x_2} \\ X_3 = l_{31} w_1 + l_{32} w_2 + l_{33} w_3 + m_{x_3} \\ \vdots \\ X_n = l_{n1} w_1 + l_{n2} w_2 + \cdots + l_{nn} w_n + m_{x_n} \end{cases}$$

اندیس‌ها = اندیس زمانی

همان‌طور که می‌بینیم، خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه و لحظات قبل وابسته است

$\Leftarrow$ سیستم علّی است.

---

* تمرین شبیه‌سازی ۲ (اختیاری) با استفاده از تابع تجزیه چولسکی در تمرین 1، کاری بنویسید که یک بردار تصادفی $\vec{x}$ را سفید کند. جواب علّی را پیاده‌سازی کنید و بررسی کنید که بردار حاصل یک بردار سفید است.

مثال: بردار تصادفی گوسی $\underline{X}$ (نرمال n بعدی)

مشابه حالت ۲ بعدی، بردار تصادفی گوسی $\underline{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$، یک بردار تصادفی است که هر ترکیب خطی دلخواه از عناصر آن، یک متغیر تصادفی گوسی می‌شود.

$$\forall\ \underline{a} \in \mathbb{R}^n \ ; \quad Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad , \quad Z \sim N(m_z, \sigma_z^2) \Rightarrow \underline{X} \text{ گوسی}$$

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

در ادامه می‌خواهیم خصوصیات آماری بردار تصادفی گوسی را بررسی کنیم. در قدم اول می‌خواهیم توابع احتمال بردار تصادفی گوسی $\underline{X}$ را به دست بیاوریم. $\Phi_{\underline{X}}(\underline{w})$ یا $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ یا $F_{\underline{X}}(\underline{x})$

مشتابه حالت دوبعدی ، بدست آوردن $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ یا $F_{\underline{x}}(\underline{x})$ نیازمند عملیات طولانی و پیچیده دارد.

بنابراین از تابع مشخصه استفاده می‌کنیم.

$$\varphi_{\underline{x}}(\underline{w}) = E\, e^{j\underline{w}^T \underline{x}} = E\, e^{j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}_{z}} = E\, e^{jz} \quad (1)$$

از طرفی میدانیم که $z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ یک ترکیب خطی از عناصر بردار تصادفی گوسی $\underline{x}$ است، درنتیجه یک متغیر تصادفی گوسی است یعنی

$$z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

حال داریم

$$\varphi_z(w) = E\, e^{jwz} = e^{jwm_z}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2 w^2} \quad (2)$$

(1), (2)

$$\Longrightarrow \quad \varphi_{\underline{x}}(\underline{w}) = E e^{jz} = E e^{jwz}\Big|_{w=1} = \varphi_{\underline{x}}(w)\Big|_{w=1} = e^{jm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2}$$

$$\varphi_x(w) = e^{jwm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2 w^2}$$

بنابراین برای به دست آوردن $\varphi_{\underline{x}}(\underline{w})$ نیاز است که m_z ، σ_z^2 را به دست بیاوریم.

$$z = \underline{w}^T \underline{x} = \sum_{i=1}^{h} w_i x_i$$

$$\Longrightarrow \quad m_z = Ez = E\,\underline{w}^T \underline{x} = \underline{w}^T \underbrace{E\underline{x}}_{m_{\underline{x}}} = \underline{w}^T m_{\underline{x}}$$

$$\underline{Z} = \underline{w}^T \underline{X} \quad , \qquad \underline{m_z = w^T m_x}$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = EZ^2 - EZ^2 = E\left|Z - m_z\right|^2 = E\left|\underline{w}^T\underline{X} - \underline{w}^T m_x\right|^2$$

$$\sigma_z^2 = E\left|\underline{w}^T(\underbrace{\underline{X} - \underline{m}_x}_{\tilde{\underline{X}}})\right|^2 = E\left|\underbrace{\underline{w}^T\tilde{\underline{X}}}_{\text{اسکالر}}\right|^2 = E\left(\underline{w}^T\tilde{\underline{X}}\right)\left(\underline{w}^T\tilde{\underline{X}}\right)^H$$

$$\sigma_z^2 = E\,\underline{w}^T\tilde{\underline{X}}\,\tilde{\underline{X}}^H\,\underline{w} = \underline{w}^T\underbrace{E\,\tilde{\underline{X}}\,\tilde{\underline{X}}^H}_{C_{\underline{X}}}\,\underline{w} = \underline{w}^T C_{\underline{X}}\,\underline{w}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_z^2 = w^T C_x w}$$

$$\Longrightarrow \varphi_{\underline{x}}(\underline{w}) = e^{jm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2} = e^{j\underline{w}^T m_{\underline{x}}} e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T C_{\underline{x}} \underline{w}}$$

$$\Longrightarrow \varphi_{\underline{x}}(\underline{w}) = e^{j\underline{w}^T m_{\underline{x}}} e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T C_x \underline{w}}$$

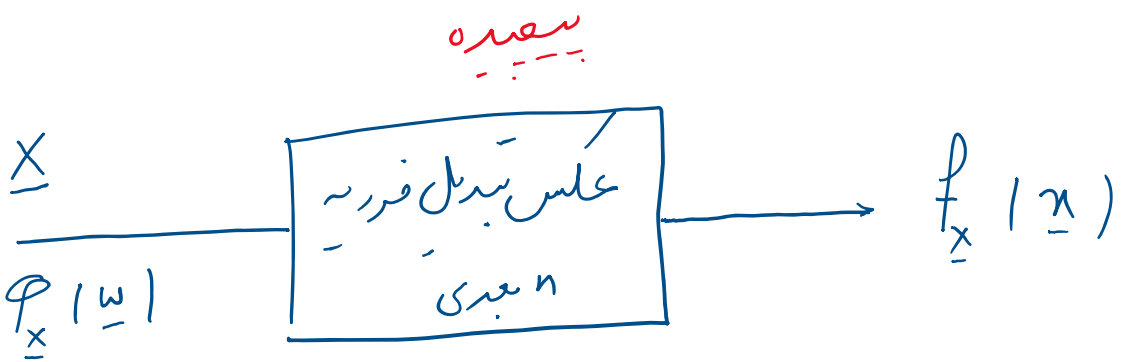
یادآوری : فرم درجه دوم بردار $\underline{w}$ با ماتریس ضرایب C_x

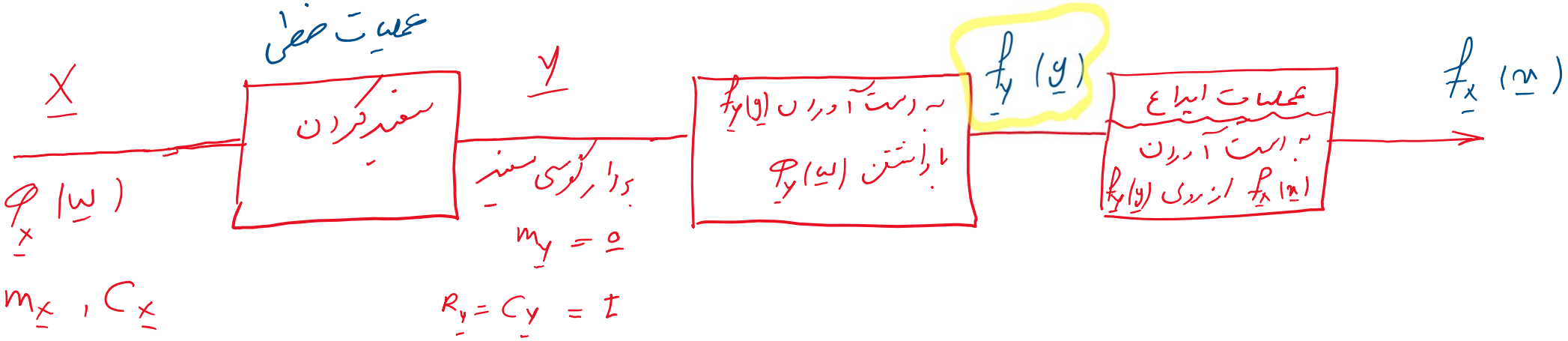
$$\underline{w}^T C_x \underline{w} = q_{C_{\underline{x}}}(\underline{w})$$

$$\Longrightarrow \varphi_{\underline{x}}(\underline{w}) = e^{j\underline{w}^T m_{\underline{x}}} e^{-\frac{1}{2} q_{C_{\underline{x}}}(\underline{w})}$$

$$\varphi_{\underline{X}}(-\underline{w}) \quad \xleftrightarrow[\text{n بعدی}]{\text{تبدیل فوریه}} \quad f_{\underline{X}}(\underline{x})$$

$$\Longrightarrow \quad f_{\underline{X}}(\underline{x}) = FT^{-1}\left\{\varphi_{\underline{X}}(-\underline{w})\right\}$$





$$\varphi_X(\underline{w}) = e^{j\underline{w}^T m_X} \; e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T C_X \underline{w}}$$

بردار نویزی سنجه $\underline{Y}$

$m_Y = 0$

$C_Y = I$

$$\varphi_Y(\underline{w}) = e^{j\underline{w}^T 0} \; e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T I \underline{w}} = e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T \underline{w}}$$

* بردار تصادفی $\underline{Y}$ حاصل از یک عملیات خطی بروی بردار تصادفی $\underline{X}$ است. بنابراین هر ترکیب خطی دلخواه از عناصر بردار تصادفی $\underline{Y}$، در واقع یک ترکیب خطی از عناصر بردار تصادفی $\underline{X}$ است و تولید یک متغیر تصادفی گوسی می کند. $\Leftarrow$ بردار $\underline{Y}$ یک بردار گوسی (نرمال) است.

$$\varphi_{\underline{Y}}(\underline{w}) = e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T\underline{w}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}w_i^2}$$

$$X \sim N(m_x, \sigma_x^2) \rightarrow \begin{cases} \varphi_x(w) = e^{jwm_x} e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 w^2} \\ f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right) \end{cases}$$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow$ با داوری:

$$\begin{cases} \varphi_x(w) = e^{-\frac{1}{2}w^2} \\ f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

$$\varphi_{\underline{Y}}(\underline{w}) = e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T\underline{w}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}w_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{Y_i}(w_i)$$

بنابراین می‌توان نوشت $\varphi_{Y_i}(w_i) = e^{-\frac{1}{2}w_i^2}$ که در آن

$$\begin{cases} Y_i \sim N(0,1) \;,\; \varphi_{Y_i}(w_i) = e^{-\frac{1}{2}w_i^2} \Rightarrow f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \\ Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp Y_n \end{cases}$$

یعنی $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ متغیرهای تصادفی نرمی استاندارد و iid هستند

iid : independent identically distributed

$$\Rightarrow f_{\underline{y}}(\underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_i^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f_{\underline{y}}(\underline{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\underline{y}^T \underline{y}}$$

در مرحله‌ی بعد عملیات ابداع را بر روی بردار گوسی سفید $\underline{Y}$ اعمال می‌کنیم و بر اساس این عملیات با داشتن $f_{\underline{Y}}(\underline{y})$ به تابع چگالی احتمال بردار تصادفی گوسی $\underline{X}$ یعنی $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ می‌رسیم.

عملیات ابداع :

$$\underline{X} = L\,\underline{y} + m_{\underline{x}} \quad (1) \qquad , \qquad C_{\underline{x}} = LL^{H}$$

$\underline{X}$ به صورت یک تابع خطی از بردار سفیدگری $\underline{y}$ بیان شده است. بنابراین می‌توانیم به راحتی با داشتن $f_{\underline{y}}(\underline{y})$ ، تابع $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ را به دست بیاوریم.

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{f_{\underline{y}}(\underline{x}_1)}{|J|_{\underline{x}_1}} = \frac{f_{\underline{y}}\left(L^{-1}(\underline{x}-m_{\underline{x}})\right)}{|\det L|}$$

$$J = \det L$$

(1) عکس معادله $\underline{x}_1 = L^{-1}(\underline{x}-m_{\underline{x}})$

$$, \quad f_{\underline{y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}}\, e^{-\frac{1}{2}\underline{y}^{T}\underline{y}}$$

$$\Rightarrow f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{|\det L|} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(L^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right)^T\left(L^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det L|^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T \underbrace{L^{-T}L^{-1}}_{C_x^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right]$$

$$\det C_x$$

$$\Rightarrow f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\underbrace{(\underline{x}-\underline{m}_x)^T C_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)}_{q_{C_x^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_x)}\right]$$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} \exp\left(-\frac{1}{2} q_{C_X^{-1}}(\underline{x} - \underline{m}_X)\right)$$

در ادامه بحث، به بررسی خصوصیات دیگری از یک بردار تصادفی گوسی $\underline{X}$ می‌پردازیم.

در واقع خصوصیاتی که در حالت دو بعدی دیدیم، به حالت n بعدی تعمیم می‌دهیم.