به نام خدا

مدل های (بیان های) یک فرآیند تصادفی

ـ مدل آماری

همان طور که گفتیم منظور از بیان آماری یک فرآیند، توابع احتمال متغیرهای تصادفی آن فرآیند است و در نتیجه مدل آماری فرآیند از مرتبه های مختلف قابل تعریف است.

* مدل آماری مرتبه اول فرآیند ≡ تابع (چگالی) احتمال متغیر تصادفی یک لحظه‌ی t از فرآیند

$$f_{x(t)}(\underbrace{x(t)}_{x}) \equiv f_x(x;t)$$

$x(t)$ ← متغیر تصادفی لحظه‌ی t

x ← متغیری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند.

* مدل آماری مرتبه دوم فرآیند ≡ تابع (چگالی) احتمال توام متغیرهای تصادفی در لحظه‌ی دلخواه t_1, t_2 از فرآیند

$$f_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2) \equiv f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

x_1: مقداری که متغیر تصادفی $x(t_1)$ اختیار می‌کند

x_2: مقداری که متغیر تصادفی $x(t_2)$ اختیار می‌کند

* مدل آماری مرتبه nام فرآیند ≡ تابع (چگالی) احتمال توام متغیرهای تصادفی لحظات دلخواه $t_1, t_2, \ldots, t_n$ از فرآیند

$$f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$\equiv f_X(\underline{x} ; \underline{t}) \equiv \underline{X}$$ تابع چگالی احتمال برداری

که در آن

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \quad , \quad \underline{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T$$

که در آن

$$\underline{X} = (\underbrace{X(t_1)}_{X_1}, \underbrace{X(t_2)}_{X_2} \ldots, \underbrace{X(t_n)}_{X_n})^T \equiv (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

بنابراین برای کارکردن با فرآیندهای تصادفی، لازم است که بتوانیم با بردارهای تصادفی شامل متغیرهای تصادفی یک فرآیند کار کنیم. تمام مطالبی که درمورد بردارهای تصادفی بیان کردیم، در این بخش نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

* اگر مدل آماری مرتبه‌ی n ام فرآیند $\{X_t\}$ از $n=1$ تا $n=\infty$ نیز در دسترس باشد، می‌گوییم که یک مدل کامل آماری از فرآیند را در اختیار داریم.

* اگر مدل آماری مرتبه‌ی n ام یک فرآیند را داشته باشیم، مدل‌های آماری مرتبه‌ی پایین‌تر از آن نیز در اختیار داریم.

به طور مثال: اگر مدل آماری مرتبه سوم فرآیندی را داشته باشیم یعنی

$$f_x(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)$$

آنگاه تمامی مدل های آماری مرتبه پایین تر از آن در اختیار داریم.

$$\int f_x(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)\, dx_3 = f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$\int f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_2 = f_x(x_1; t_1)$$

* همان طور که در مبحث متغیرهای تصادفی، می‌توانیم در متغیر تصادفی را به صورت توأم بررسی کنیم، در مبحث فرآیندهای تصادفی نیز می‌توان در فرآیند تصادفی را به صورت توأم بررسی کرد.

دو فرآیند تصادفی $X(t)$ و $Y(t')$ را در نظر می‌گیریم.

$$T \times \Omega \xrightarrow{X(t)} \mathbb{R} \quad , \quad T' \times \Omega \xrightarrow{Y(t')} \mathbb{R}$$

برای کار کردن با دو فرآیند تصادفی $X(t)$ و $Y(t')$، با بردارهایی از متغیرهای تصادفی $X(t)$ و $Y(t')$ به صورت توأم سروکار داریم.

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \\ y(t_1') \\ y(t_2') \\ \vdots \\ y(t_m') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \cdots \\ \underline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \left(x(t_1), x(t_2) \ldots, x(t_n) \right)^T, \quad \underline{Y} = \left(y(t_1'), y(t_2') \ldots, y(t_m') \right)^T$$

$$\underline{X} \equiv \left(X_1, X_2, \ldots, X_n \right)^T, \quad \underline{Y} \equiv \left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \right)^T$$

بنابراین برای کار کردن با دو فرآیند تصادفی $X(t)$ و $Y(t')$ به صورت توأم، نیاز به مدل آماری توأم در فرآیند داریم که در کلی ترین حالت به صورت زیر قابل بیان است.

$$f_{X(t_1)\cdots X(t_n)\,Y(t'_1)\cdots Y(t'_m)}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \equiv f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')$$

که در آن

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \quad , \quad \underline{t}' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_m)^T$$

مقادیری که $Y(t'_1), \dots, Y(t'_m)$ اختیار می‌کنند

مدل آماری توأم $X(t)$ و $Y(t')$ از مرتبه $n+m$ نسبت به $X(t)$ و از مرتبه m نسبت به $Y(t')$

$\equiv$ توابع چگالی احتمال توأم بردارهای تصادفی $\underline{X}$ و $\underline{Y}$

* اگر مدل آماری توأم در فرآیند را به ازای $n \to \infty$ و $m \to \infty$ نیز داشته باشیم، یک مدل کامل آماری توأم از دو فرآیند را در اختیار داریم.

* اگر مدل آماری توأم در فرآیند $X(t)$ و $Y(t')$ از مرتبه‌ی n ام نسبت به $X(t)$ از مرتبه‌ی m ام نسبت به $Y(t')$ در اختیار داشته باشیم، تمامی مدل‌های آماری توأم مرتبه‌های پایین‌تر از تمام مدل‌های آماری کناری مرتبه‌های پایین‌تر نیز در اختیار داریم.

* مفهوم استقلال در فرآیند تصادفی $X(t)$ ، $Y(t')$

بردار تصادفی

در فرآیند تصادفی $X(t)$ ، $Y(t')$ را مستقل از هم می‌گوییم، اگر هر زیرمجموعه از متغیرهای تصادفی $X(t)$ مستقل از هر زیرمجموعه از متغیرهای تصادفی $Y(t')$ باشد. با بیان ریاضی،

بردار تصادفی

$$\forall \underline{t} \in T^n \;,\; \forall \underline{t}' \in T'^m \;,\; \forall m, n \;;\; \underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \implies X(\cdot) \perp\!\!\!\perp Y(\cdot)$$

یا

$$\forall \underline{t} \in T^n \;;\; \forall \underline{t}' \in T'^m \;,\; \forall m, n \;;\; f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{t}, \underline{t}') = f_{\underline{X}}(\underline{x}; \underline{t}) f_{\underline{Y}}(\underline{y}, \underline{t}') \quad (*)$$

$$(*) \implies X(\cdot) \perp\!\!\!\perp Y(\cdot)$$

* فرآیند تصادفی مختلط $Z(t)$

فرآیند تصادفی مختلط $Z(t)$ را در نظر می‌گیریم. برای این فرآیندی توان نوشت

$$Z(t) = \underbrace{Re\{Z(t)\}}_{\text{یک فرآیند تصادفی}} + j \underbrace{Im\{Z(t)\}}_{\text{یک فرآیند تصادفی}}$$

$X(t;\xi) \equiv X(t)$

$Y(t;\xi) \equiv Y(t)$

$$T \times \Omega \xrightarrow{Z(t)} \mathbb{C} \quad ,$$

$$T \times \Omega \xrightarrow{X(t)} \mathbb{R} \quad , \quad T \times \Omega \xrightarrow{Y(t)} \mathbb{R}$$

بنابراین برای کار کردن با ترکیب‌های خنثی ، با تعادل‌های خنثی و سرعت‌های آن به صورت توأم کار می‌کنیم. (یعنی $H^+(aq)$ ، $OH^-(aq)$ به صورت توأم)

بنابراین تمام مطالبی که در بخش قبل بیان کردیم، برای کار کردن با ترکیب‌های تعادلی خنثی نیز به کار گرفته می‌شود. فقط باید توجه داشته باشیم که در ترکیب‌های خنثی، نمای یونی برای $H^+(aq)$ ، $OH^-(aq)$ یکسان است.

* میانگین های یک فرآیند تصادفی (میانگین های اول و دوم)

منظور از میانگین اول یک فرآیند تصادفی $X(t)$ ، امید ریاضی متغیر تصادفی به دست آمده از t از فرآیند است یعنی

$$E\,X(t) = \int x\, f_x(x;t)\, dx \equiv m_x(t)$$

میانگین اول فرآیند تصادفی $X(t)$

تابعیت از t نشان دهنده تصادفی بودن و در حالت کلی متغیر تابعیت از t دارد)

* گاهی دو متغیر تصادفی $X(t)$ مستقل هستند اگر متغیرهای تصادفی در لحظه‌های دلخواه t_1 و t_2 از هم مستقل باشند.

$$E\,X(t_1)\,X^*(t_2) = \iint x_1\,x_2\,f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

تابع همبستگی فرایند تصادفی $X(t)$

$$E\,X(t_1)X^*(t_2) = R_X(t_1,t_2)$$

$\Leftarrow$ تابع همبستگی فرایند تصادفی $X(t)$ یعنی $R_X(t_1,t_2)$ نشان دهنده‌ی همبستگی متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ یعنی لحظات t_1 و t_2 از هم مستقل است.

* تابع همبستگی فرآیند $X(t)$ یعنی $R_X(t_1, t_2)$ به ازای $t_1 = t_2 = t$ نشان دهنده قدرت متغیر تصادفی لحظه‌ی t از فرآیند است و از این جهت به آن قدرت لحظه‌ای فرآیند می‌گویند.

$$R_X(t_1, t_2)\Big|_{t_1=t_2=t} = E\,X(t)\,X^*(t) = E\,|X(t)|^2 = R_X(t, t) = P_X(t)$$

* اگر تابع همبستگی فرآیند $X(t)$ یعنی $R_X(t_1, t_2)$ برابر صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی لحظات t_1 و t_2 از فرآیند بر هم عمود هستند.

$$\exists\, t_1, t_2 \;;\; R_X(t_1, t_2) = E\,X(t_1)\,X^*(t_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(t_1) \perp X(t_2)$$

* با توجه به تعریف تابع همبستگی نرمال $X(t)$ ، می‌توان گفت که تابع همبستگی $R_X(t_1, t_2)$ همواره دارای تقارن هرمیتی به فرم زیر است.

$$R_X^*(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1)$$

$$R_X^*(t_1, t_2) = \left[E\{X(t_1)X^*(t_2)\}\right]^* = E\{X(t_2)X^*(t_1)\} = R_X(t_2, t_1)$$

* همان دوم مرکزی

برای فرآیند تصادفی $X(t)$ همان دوم مرکزی نیز به صورت زیر قابل تعریف است.

$$C_X(t_1,t_2) = E\,\tilde{X}(t_1)\,\tilde{X}^*(t_2) = E\left[\left(X(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_X(t_2)\right)^*\right]$$

تابع کوواریانس فرآیند تصادفی $X(t)$

$\Leftarrow$ تابع کوواریانس فرآیند تصادفی $X(t)$ یعنی $C_X(t_1,t_2)$ نشان دهنده ی کوواریانس متغیرهای تصادفی لحظات t_1 و t_2 از فرآیند است.

* تابع کوواریانس فرآیند تصادفی $X(t)$ یعنی $C_X(t_1,t_2)$ به ازای $t_1=t_2=t$ نشان دهنده واریانس متغیر تصادفی لحظه ی t از فرآیند است.

$$C_x(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=t} = E\,\tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) = E\left|\tilde{X}(t)\right|^2 = Var\left(X(t)\right)$$

$$= Var_X(t) = \sigma_X^2(t) \equiv C_X(t,t)$$

* اگر تابع کواریانس فرآیند تصادفی X ، برابر صفر باشد یعنی $R_X(t_1,t_2)=0$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی لحظات t_1 و t_2 از فرآیند ، ناهمبسته هستند یعنی

$$\exists\, t_1,t_2 \;;\; C_X(t_1,t_2)=0 \quad \Longrightarrow \quad X(t_1) \perp X(t_2)$$

* تابع کواریانس یک فرآیند تصادفی $X(t)$ همواره دارای تقارن هرمیتی به فرم زیر است،

$$C_X(t_1, t_2) = C_X^*(t_2, t_1)$$

* رابطه‌ی بین تابع کواریانس و تابع خودهمبستگی یک فرآیند تصادفی $X(t)$ به صورت زیر است،

$$C_X(t_1, t_2) = E\left(\tilde{X}(t_1)\,\tilde{X}^*(t_2)\right) = E\left[\left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_X(t_2)\right)^*\right]$$

$$= \underbrace{E\,X(t_1)\,X^*(t_2)}_{R_X(t_1,t_2)} - m_X(t_1)\underbrace{E\,X^*(t_2)}_{m_X^*(t_2)} - m_X^*(t_2)\underbrace{E\,X(t_1)}_{m_X(t_1)} + m_X(t_1)\,m_X^*(t_2)$$

$\uparrow$ به خاطر امید ریاضی (1.0)

$$\Longrightarrow \quad C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)\, m_x^*(t_2)$$

* به طریق مشابه برای دو فرآیند تصادفی $x(t)$ ، $y(t)$ نیز می‌توان همان حدهای متقابل تعریف کرد.

* همان متقابل مرتبه اول دو فرآیند $x(t)$ ، $y(t')$

$$R_{xy}(t, t') = E\, x(t)\, y^*(t') \quad \equiv$$

تابع همبستگی متقابل دو فرآیند $x(t)$ ، $y(t')$

$\Longleftarrow$ تابع همبستگی متقابل دو فرآیند $x(t)$ ، $y(t')$ نشان دهنده همبستگی متقابل متغیرهای تصادفی لحظات t ، t' از دو فرآیند $x(t)$ ، $y(t')$ است.

* اگر تابع همبستگی متقابل دو فرآیند تصادفی برابر صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی لحظات t و t' از دو فرآیند برهم عمود هستند.

$$\exists\, t, t' \;;\; R_{xy}(t, t') = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) \perp Y(t')$$

* اگر تابع همبستگی متقابل دو فرآیند تصادفی، همواره برابر صفر باشد، آنگاه دو فرآیند متعامد می‌گوییم یعنی

$$\forall\, t, t' \;;\; R_{xy}(t, t') = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\cdot) \perp Y(\cdot)$$

* تابع همبستگی متقابل دو فرآیند همواره دارای تقارن هرمیتی به شرح زیر است.

$$R_{xy}^{*}(t,t') = R_{yx}(t',t)$$

(به عنوان تمرین بیان کنید)

- همان متقابل مرکزی مرتبه اول دو فرآیند $x(t)$ ، $y(t')$

$$C_{xy}(t,t') = E\,\tilde{X}(t)\,\tilde{Y}^{*}(t') = E\left[(x(t)-m_x(t))(y(t')-m_y(t'))^{*}\right]$$

تابع کوواریانس متقابل دو فرآیند $y(t')$ ، $x(t)$

⇐ تابع کواریانس متقابل دو فرآیند تصادفی، نشان دهنده کواریانس متقابل متغیرهای تصادفی لحظات t, t' از دو فرآیند $X(t)$, $Y(t')$ است.

* اگر تابع کواریانس متقابل دو فرآیند تصادفی برابر صفر باشد، می‌توان گفت که متغیرهای تصادفی لحظات t, t' از دو فرآیند، ناهمبسته هستند یعنی

$$\exists t, t' \;;\; C_{XY}(t,t') = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) \perp Y(t')$$

* اگر تابع کواریانس متقابل دو فرآیند تصادفی همواره برابر صفر باشد، آنگاه دو فرآیند تصادفی را ناهمبسته می‌گوییم یعنی

$$\forall t, t' \;;\; C_{XY}(t,t') = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) \perp Y(t)$$

* تابع کواریانس متقابل دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t')$ عبارت است از:

$$C_{xy}(t,t') = C_{yx}(t',t)$$

به عنوان تمرین نشان دهید!

* رابطه بین تابع همبستگی متقابل و تابع کواریانس متقابل دو فرآیند

$$C_{xy}(t,t') = R_{xy}(t,t') - m_x(t)\,m_y^*(t')$$

به عنوان تمرین نشان دهید!

با توجه به اینکه فرآیندهای تصادفی به دو پارامتر ζ و t وابسته هستند، براساس تغییرات زمانی (خصوصیات زمانی فرآیند) می توانیم دسته بندی هایی را برای فرآیندها مطرح کنیم. در ادامه به معرفی برخی از این دسته بندی ها می پردازیم.

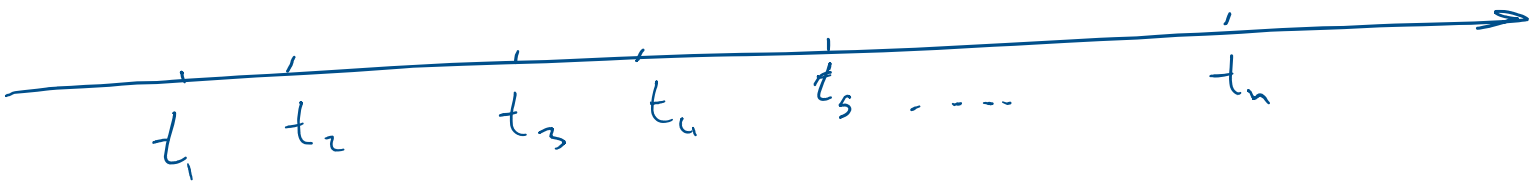
* فرآیندهای با تغو مستقل Independent Increment

فرآیند تصادفی $X(t)$ را یک فرآیند با تغو مستقل می گوییم، اگر متغیر تصادفی هر لحظه از فرآیند مستقل از تغو فرآیند، در بازه های زمانی بدون اشتراک بعدی باشد.

$\forall\, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$;

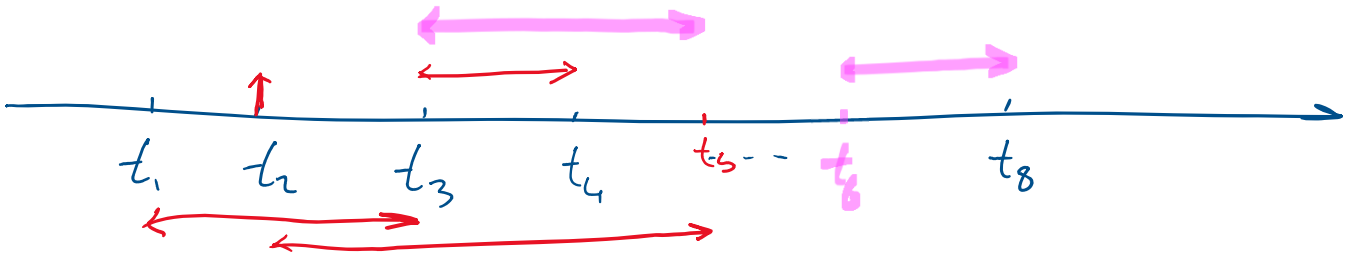
$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp \left[X(t_2) - X(t_1)\right] \perp\!\!\!\perp \left(X(t_3) - X(t_2)\right] \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp \left(X(t_n) - X(t_{n-1})\right]$$

$\Leftarrow$ خزآنید، بعد مستقل است.



* درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. اگر $x(t)$ کیفی آیند، بعد مستقل است.

1) $x(t_2) \perp\!\!\!\perp [x(t_4) - x(t_3)]$ ✓

2) $[x(t_3) - x(t_1)] \perp\!\!\!\perp [x(t_5) - x(t_2)]$ ✗

3) $[x(t_5) - x(t_3)] \perp\!\!\!\perp [x(t_8) - x(t_6)]$ ✓