به نام خدا

- متغیر تصادفی گوسی (نرمال)

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

مثال: نویزهای جمع شونده در سیستم های مخابراتی اغلب به صورت یک متغیر تصادفی گوسی مدل سازی می شوند. فرض کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده نویز جمع شونده گوسی با میانگین صفر و انحراف از معیار $\frac{3}{4}$ باشد. در مورد این متغیر تصادفی به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- احتمال این را پیدا کنید که اندازه این نویز جمع شونده کمتر یا مساوی 1.5 باشد.

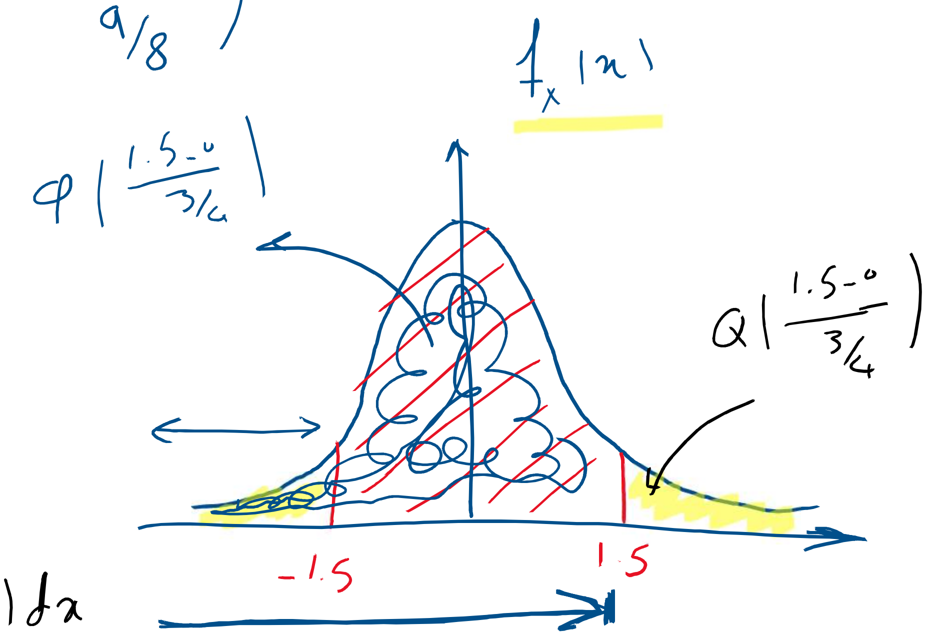
$$P_r\{|X| \leqslant 1.5\} = ?$$

$$X \sim N\left(0, \left(\frac{3}{4}\right)^2\right), \quad m = 0, \quad \sigma^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{9}{8}}} \exp\left(-\frac{x^2}{9/8}\right)$$

$$P_1 = P_r\{|X| \leq 1.5\}$$

$$= P_r\{-1.5 \leq X \leq 1.5\} = \int_{-1.5}^{1.5} f_X(x)\,dx$$



به جای نمایش انتگرال می‌توان از توابع $\varphi(\cdot)$ یا $Q(\cdot)$ یا $erfc(\cdot)$ استفاده کرد. به طور مثال با استفاده از تابع $\varphi(\cdot)$ مقدار P_1 به صورت زیر خواهد بود:

$$P_1 = P_r \{-1.5 \leqslant X \leqslant 1.5\} = \varphi\left(\frac{1.5-0}{3/4}\right) - \varphi\left(\frac{-1.5-0}{3/4}\right) = 0.954$$

$$\varphi(-|y|) = 1 - \varphi(|y|)$$

$$P_1 = P_r \{-1.5 \leqslant X \leqslant 1.5\} = 1 - 2Q\left(\frac{1.5-0}{3/4}\right)$$

به عنوان تمرین عبارت P_1 را برحسب $erfc(\cdot)$ بنویسید.

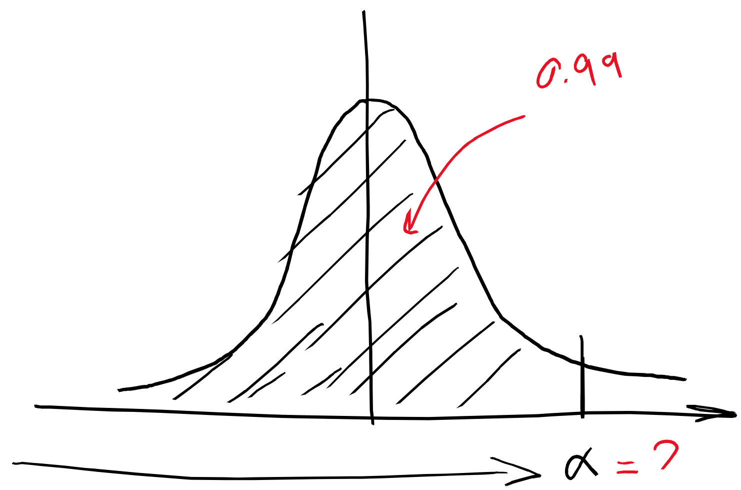
۲- محاسبه کنید که سطح زیر با احتمال 0.99 از چه مقداری بیشتر نمی‌شود

(محاسبه صدک 99)

$$P_2 = P_r\{X \leqslant ?\} = 0.99$$

$$P_2 = P_r\{X \leqslant \alpha\} = 0.99$$

$$P_2 = \varphi\left(\frac{\alpha - 0}{3/4}\right) = 0.99$$



مراجعه به جدول $\longrightarrow \varphi(\cdot)$

$$\frac{\alpha - 0}{3/4} = 2.326$$

$$\varphi(2.326) = 0.99 \quad \text{یا} \quad \varphi^{-1}(0.99) = 2.326$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \times 2.326$$

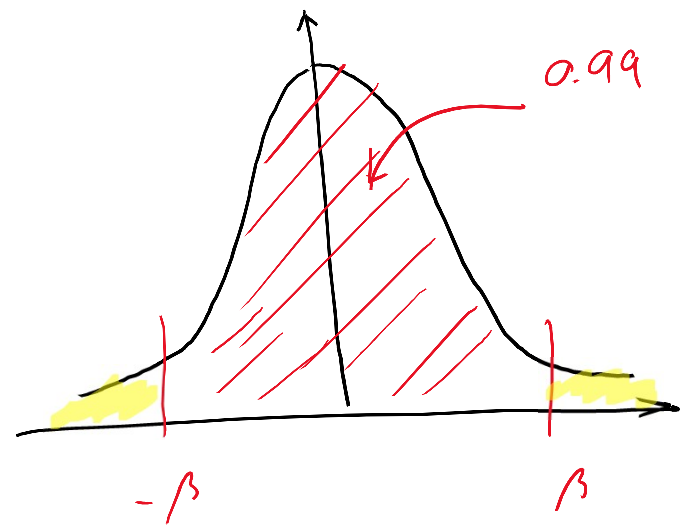
۳- محاسبه کنید که اندازه نویز با احتمال 0.99 از چه سطحی بیشتر نخواهد شد.

$$P_3 = P_r\{ |X| \leq ? \} = 0.99$$

$$= P_r\{ |X| \leq \beta \} = 0.99$$

$$= P_r\{ -\beta \leq X \leq \beta \}$$

$$= \varphi\left(\frac{\beta - 0}{3/4}\right) - \varphi\left(\frac{-\beta - 0}{3/4}\right) = 1 - 2Q\left(\frac{\beta - 0}{3/4}\right)$$



$$\Longrightarrow \quad 1 - 2Q\left(\frac{\beta - 0}{3/4}\right) = 0.99 \quad \Longrightarrow \quad Q\left(\frac{\beta}{3/4}\right) = 0.005$$

$$\xrightarrow{\text{مراجعه به جدول}} \quad \frac{\beta}{3/4} = Q^{-1}(0.005) \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{3}{4} Q^{-1}(0.005)$$

$Q(\cdot)$

$Q^{-1}(0.005)$

- توزیع نمایی exponential

متغیر تصادفی X را دارای توزیع نمایی می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$\Leftarrow$ متغیر تصادفی نمایی X، مقادیر غیرمنفی را اختیار می‌کند

با کمک تابع پله واحد، می‌توان $f_X(x)$ را به صورت زیر نمایش داد

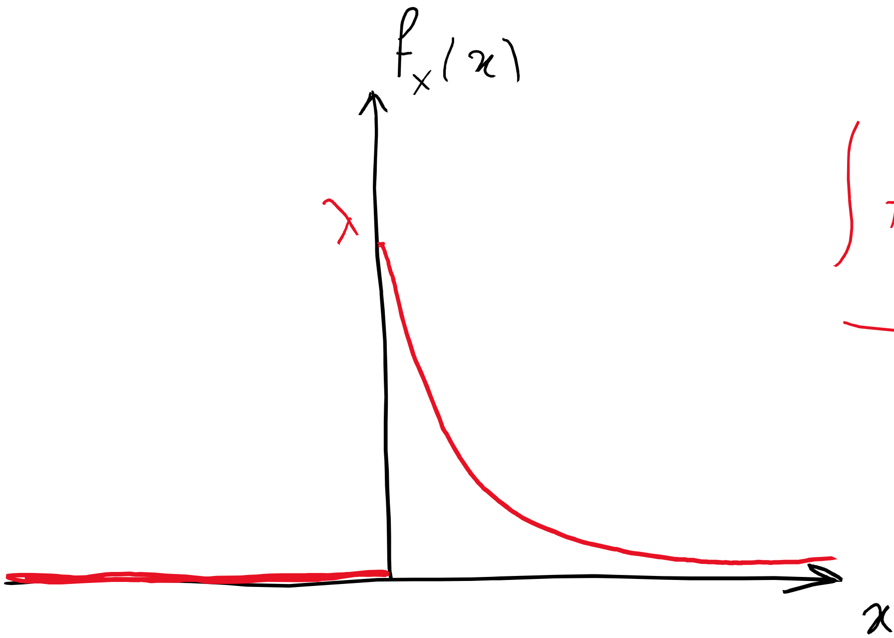
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

با کمک تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نمایی می‌توان تابع توزیع احتمال آن را نیز بدست آورد

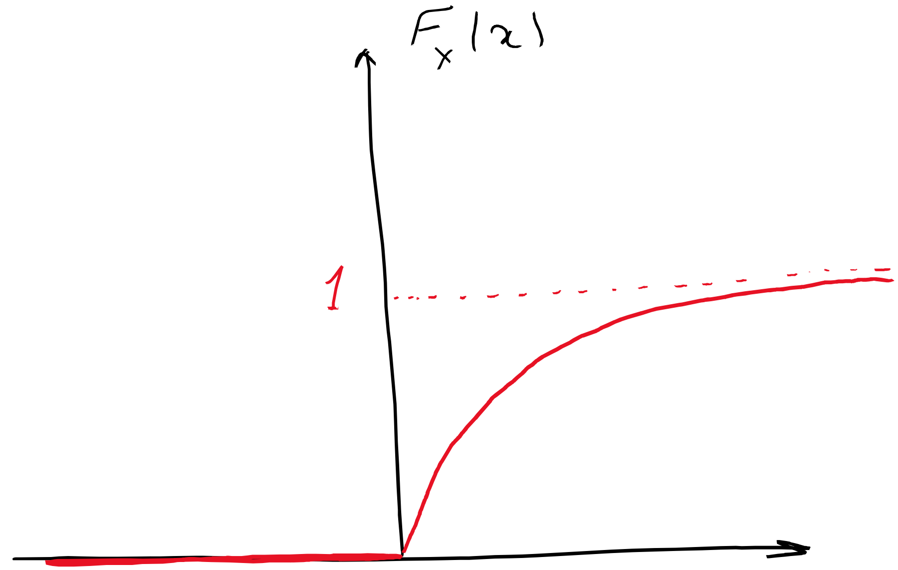
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda\alpha}\, d\alpha = -e^{-\lambda\alpha}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) u(x)$$



$$\xrightarrow{\int f_X(\alpha)\,d\alpha}$$



$X \sim \exp(\lambda)$

متغیر تصادفی نمایی

متغیر تصادفی نمایی، یک متغیر تصادفی پرکاربرد برای مدل سازی برخی پارامترها در شبکه‌های مخابراتی است. به طور مثال در شبکه‌های مخابرات سلولی (موبایل) زمان رخ داد یک مکالمه یا زمان رخ داد یک درخواست مکالمه (request to call) یا بازه زمانی بین رخ داد دو مکالمه یا طول بازه‌ی زمانی یک مکالمه پارامترهایی هستند که با کمک متغیرهای تصادفی نمایی مدل سازی می‌شوند.

یکی از خصوصیات مهم متغیرهای تصادفی نمایی، بدون حافظه بودن آنها است.

یعنی برای یک متغیر تصادفی نمایی داریم .

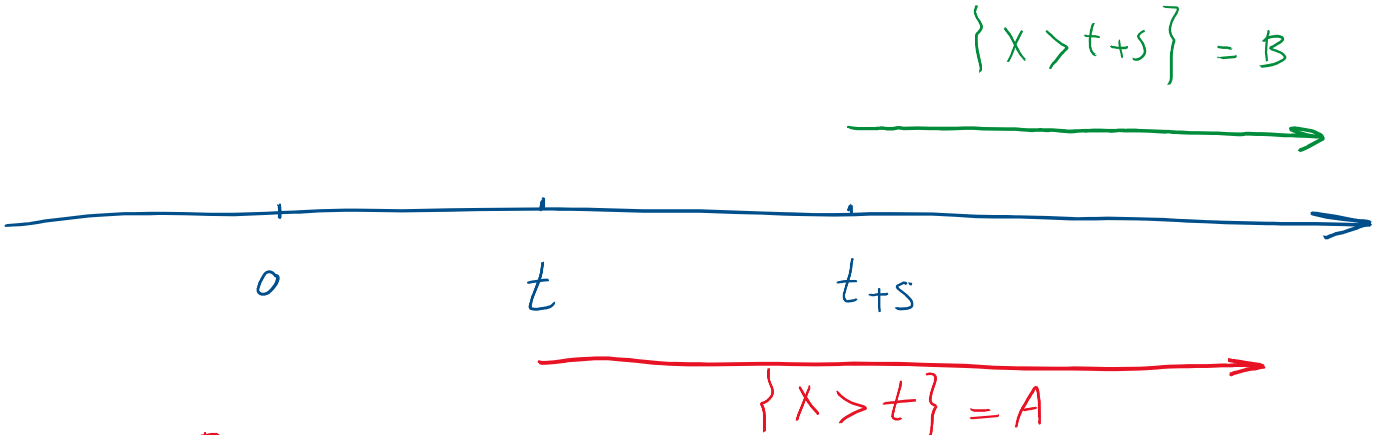
$$\forall\, t, s > 0 \;;\quad P_r\{X > t+s \mid X > t\} = P_r\{X > s\}$$

اثبات :

$$P_r\{X > t+s \mid X > t\} = \frac{P_r\{X > t+s \text{ و } X > t\}}{P_r\{X > t\}}$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) , \qquad \underbrace{F_X(x)}_{P_r\{X \leq x\}} = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$$

$$P_r\{X \leq x\} \longrightarrow P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$



$$\frac{P_r\{\overbrace{X>t+s}^{B},\ \overbrace{X>t}^{A}\}}{P_r\{X>t\}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

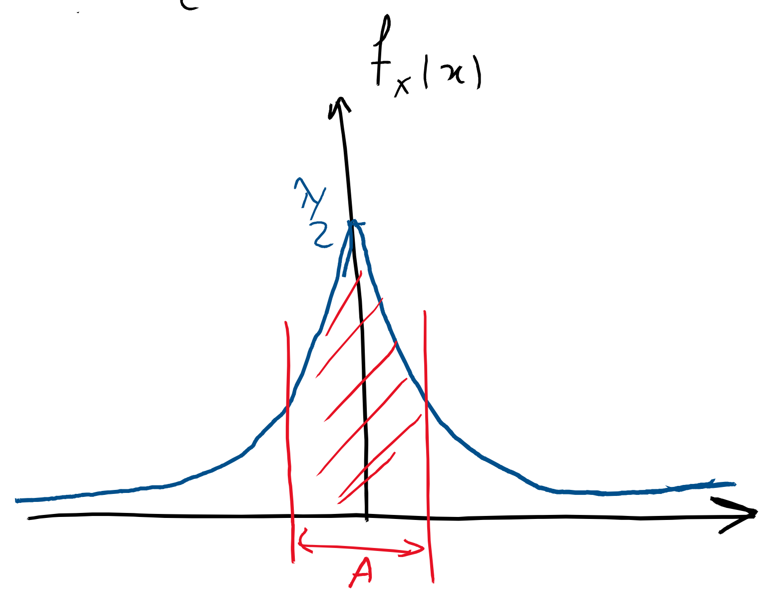
$$e^{-\lambda s} = P_r\{X>s\}$$

با توجه به تعریف $F_X(x)$

- توزیع لاپلاس (متغیر تصادفی لاپلاسین)

متغیر تصادفی X را دارای توزیع لاپلاس می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد،

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$



$$P_r\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$$

$f_X(x)$ دارای تقارن زوج است

$x \in (-\infty, \infty)$

بسیاری از نویزها را در سیستم های الکتریکی با کمک متغیر تصادفی لاپلاسین مدل سازی می کنند.

$X \sim \text{Laplacian}(\lambda)$

- توزیع گاما Gamma

یک متغیر تصادفی X را دارای توزیع گاما می گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} u(x) \longrightarrow X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$$

$r, \lambda > 0$ (X مقادیر غیرمنفی را اختیار می کند)

که در آن تابع $\Gamma(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} \, dy$$

تابع $\Gamma(\cdot)$ دارای خصوصیاتی است، از جمله اینکه همواره داریم.

$$\Gamma(r) = (r-1) \underbrace{\Gamma(r-1)}_{(r-2)\Gamma(r-2)}$$

* اگر r یک عدد طبیعی باشد، خواهیم داشت

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

* اگر r یک عدد طبیعی باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گاما به صورت زیر خواهد بود

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} u(x) \longrightarrow X \sim Erlang(r, \lambda)$$

به چنین متغیر تصادفی، متغیر تصادفی ارلانگ (Erlang) گفته می‌شود.

متغیر تصادفی ارلانگ برای مدل سازی «زمان انتظار برای r امین رخ داد پیش آمد مورد نظر» استفاده می‌شود. به عنوان مثال برای مدل سازی زمان انتظار برای r امین درخواست اتصال به شبکه مخابرات سلولی.

* می توان نشان داد که حاصلجمع r متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر λ ، یک متغیر تصادفی ارلانگ است.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_r \quad , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_r \qquad (*)$$

$$, \quad X_i \sim \exp(\lambda)$$

$$\Longrightarrow \quad Y \sim Erlang(r, \lambda)$$

* اگر $r = 1$ باشد، تابع چگالی احتمال X به صورت

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

در می آید که نشان دهنده متغیر تصادفی نمائی است.

در عبارت (*) می بینیم که اگر r برابر 1 باشد، Y یک متغیر تصادفی نمائی خواهد بود.

- توزیع $\chi^2(n)$ (Chi square) با درجه آزادی n

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی با توزیع $\chi^2(n)$ می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})} u(x) \longrightarrow X \sim \chi^2(n)$$

X مقادیر غیر منفی را اختیار می‌کند.

* می‌توان نشان داد که حاصل جمع توان دوم n متغیر تصادفی توأماً مستقل نرمال استاندارد یک متغیر تصادفی $\chi^2(n)$ است یعنی

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad , \quad X_i \sim N(0,1) \; , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$\Longrightarrow \quad Y \sim \chi^2(n)$$

* تمرین: برای $n=1$ ، متغیر تصادفی Y را بررسی کنید.

- توزیع بتا (β)

یک متغیر تصادفی X را دارای توزیع β می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{oth} \end{cases}$$

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

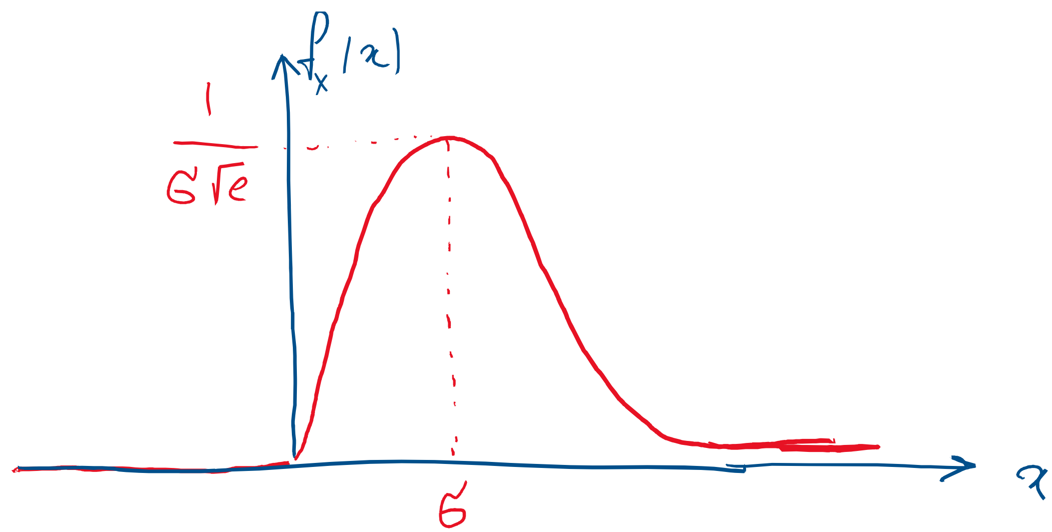
- توزیع رایلی Rayleigh

متغیر تصادفی X را دارای توزیع رایلی می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x) \longrightarrow X \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

X مقادیر غیرمنفی اختیار می‌کند.

متغیر تصادفی رایلی کاربرد های زیادی در مدل سازی کانال های مخابراتی (کانال فیدینگ) دارد.



علاوه بر این متغیر تصادفی رایلی را می‌توان به صورت پوش دو متغیر تصادفی مستقل نرمال
با میانگین صفر و واریانس σ^2 در نظر گرفت.

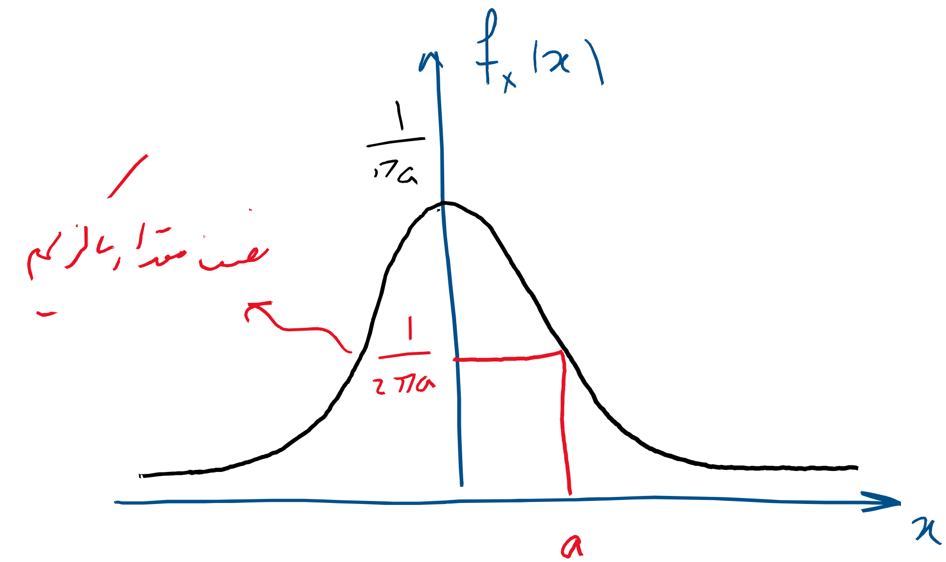
$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad ; \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 , \quad X_1 , X_2 \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Longrightarrow Y \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

- توزیع کوشی   Cauchy

متغیر تصادفی X را دارای توزیع کوشی می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2}$$



* تقارن زوج دارد

* مقادیری از $(-\infty, \infty)$ اختیار می‌کند