به نام خدا

آزمون میان‌ترم روز یکشنبه ۹۹/۹/۹ در ساعت کلاس

کلاس جبرانی روز دوشنبه ۹۹/۹/۱۷ ساعت 10:15 تا 13:00

نام کاربری = رمز عبور = شماره دانشجویی

www.LMS.dr-haghbin.info

* معرفی چند تابع احتمال مهم دیگر کاربرد

در این بخش مثال‌هایی از توابع احتمال مهم دیگر کاربرد را مطرح می‌کنیم. متغیرهای تصادفی را در دو بخش پیوسته و گسسته بررسی خواهیم کرد. در هر دسته مثال‌های متداول را مطرح می‌کنیم.

الف) حالت پیوسته

۱- تابع یکنواخت یا متغیر تصادفی یکنواخت Uniform

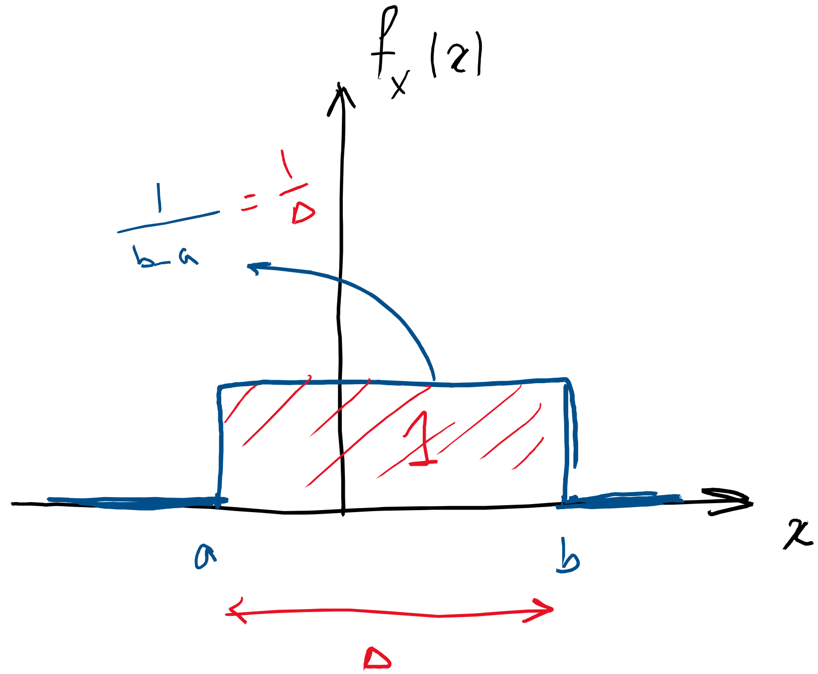
متغیر تصادفی X را که مقادیری در بازه‌ی $[a, b]$ اختیار می‌کند، یکنواخت می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن در این بازه یکنواخت (ثابت) باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$X \sim Uniform(a,b)$

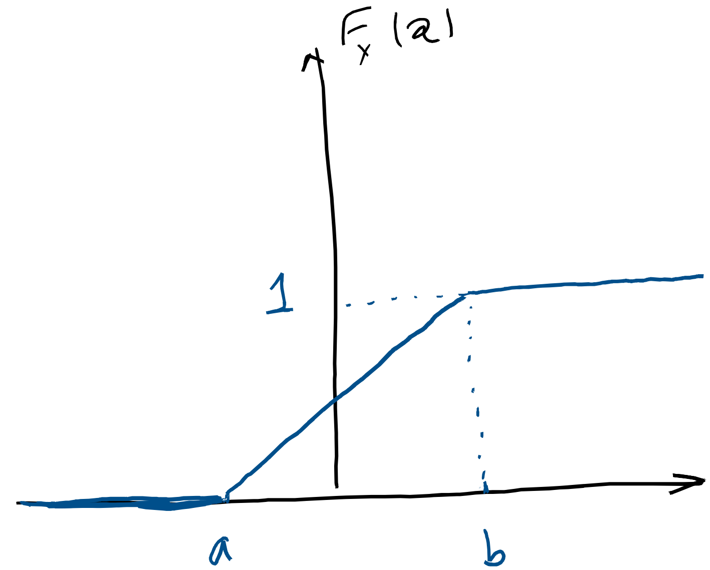
یا

$X \sim U(a,b)$



$$b - a = \Delta$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$



$$\int f_X(x)\, dx = 1$$

تابع چگالی احتمال

* متغیر تصادفی یکنواخت در حالت گسسته نیز قابل تعریف است که در جای خود به آن می‌پردازیم

تابع توزیع احتمال

* به عنوان یک مثال کاربردی، فاز سیگنال سینوسی حامل اطلاعات در سیستم‌های مخابراتی دارای توزیع یکنواخت در بازه 0 تا 2π است.

$$S(t) = A\cos(\omega t + \theta) \quad , \quad \theta \sim U(0, 2\pi)$$

* در بسیاری از کاربردها، اگر اطلاعات اولیه‌ای در مورد یک متغیر تصادفی در دسترس نباشد، معمولاً توزیع آن را یکنواخت فرض می‌کنند.

۲- توزیع گوسی یا نرمال (Gaussian) Normal

متغیر تصادفی گوسی یکی از مهم ترین و پرکاربردترین متغیرهای تصادفی در کتب‌های مهندسی است. یکی از دلایل این موضوع این است که بسیاری از پدیده‌های فیزیکی که ماهیت پیوسته دارند را می‌توان به صورت یک متغیر تصادفی گوسی مدل سازی کرد. علاوه بر این متغیر تصادفی گوسی دارای ویژگی‌های خاصی است که در ادامه درس با آنها بیشتر آشنا می‌شویم. به عنوان مثال در مورد متغیرهای تصادفی گوسی قضیه حد مرکزی برقرار است که طبق آن می‌توان مجموع تعداد زیادی متغیر تصادفی مستقل را به صورت یک متغیر تصادفی گوسی مدل سازی کرد. به همین دلیل در کتب مهندسی بسیاری از نویزها و تداخل‌ها به صورت گوسی مدل

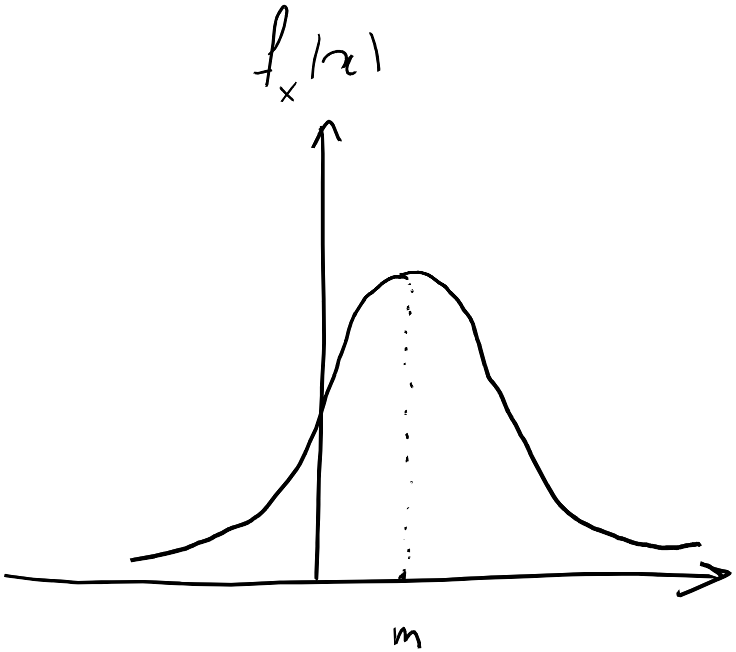
می‌شوند.

یک متغیر تصادفی گوسی با دو پارامتر m و σ^2 با تابع چگالی احتمال زیر شناخته می‌شود.

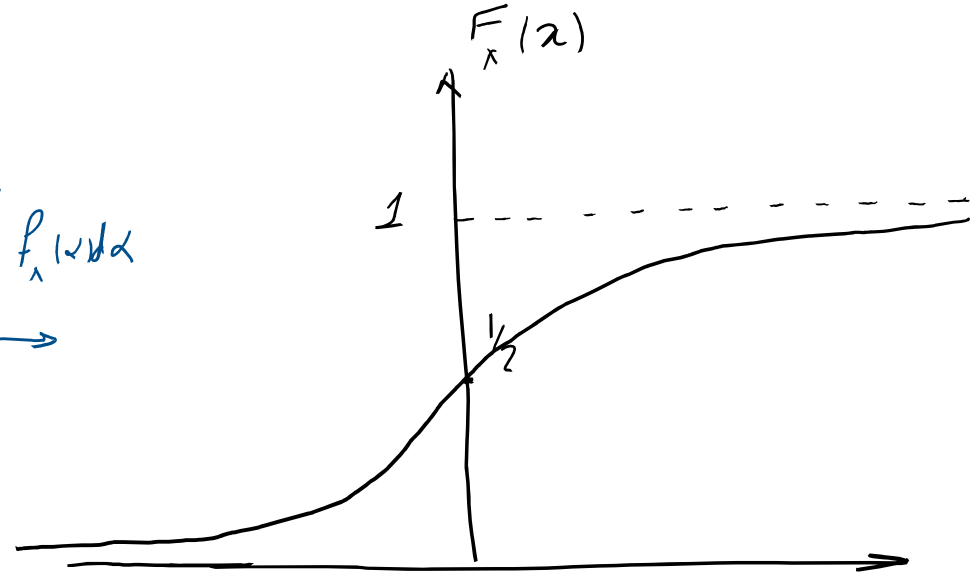
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad X \sim N(m, \sigma^2)$$

خواهیم دید که m در واقع میانگین متغیر تصادفی X است و σ^2 واریانس متغیر تصادفی X است.

به عبارت دیگر σ برابر انحراف معیار متغیر تصادفی X و نشان دهنده‌ی انحراف X از مقدار میانگین خودش است.



$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha$$



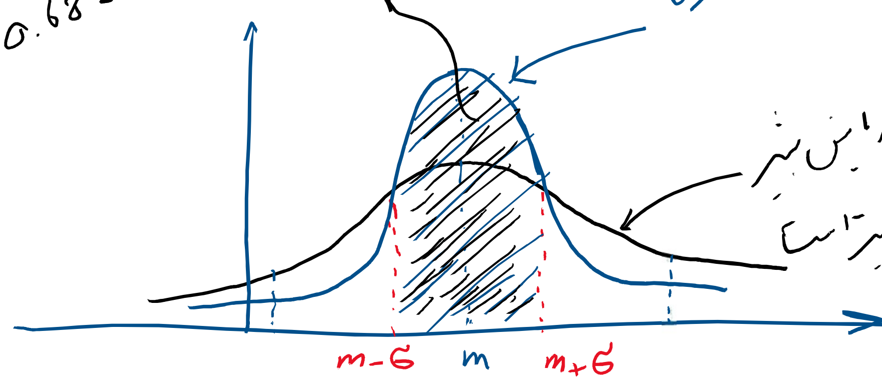
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x
حول m دارای تقارن زوج است

* هر چه σ کمتر باشد نمودار
بلندتر و باریکتر می‌شود

سطح هاشور خورده = 0.683

واریانس کمتر

واریانس بیشتر
انحراف از مقدار میانگین بیشتر است



از نظر آماری احتمال بعضی از بازه ها حول مقدار میانگین دارای اهمیت است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می کنیم.

$$P_r\{m-\sigma < X < m+\sigma\} = 0.683 = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f_X(x)\,dx$$

$$P_r\{m-2\sigma < X < m+2\sigma\} = 0.954$$

$$P_r\{m-3\sigma < X < m+3\sigma\} = 0.997$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

با توجه به کاربردهای زیادی که متغیر تصادفی گوسی دارد، توابع مختلفی در ارتباط با این متغیر تعریف شده است

و مقادیر تابع در نقاط مختلف x محاسبه شده است و به صورت جدول های در دسترس است

در ادامه می خواهیم این توابع را معرفی کنیم. برای این منظور لازم است ابتدا رابطه بین متغیر تصادفی

گوسی با پارامترهای $N(m, \sigma^2)$ را نسبت به یک متغیر تصادفی گوسی استاندارد $N(0,1)$

بیان کنیم.

فرض کنیم Y یک متغیر تصادفی گوسی $N(0,1)$ است.

$$Y \sim N(0,1) \implies f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

متغیر تصادفی X را به صورت یک ترکیب خطی از Y به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$X = ay + b$$

(معادل scale کردن Y با ضریب a و شیفت دادن به میزان b است)

هدف ما به دست آوردن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X و پیدا کردن رابطه‌ی آن با تابع چگالی احتمال Y است.

برای این منظور از تابع توزیع احتمال X شروع می‌کنیم و با مشتق گیری از آن، تابع چگالی احتمال X را به دست می‌آوریم

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \leq x\} = P_r\{aY+b \leq x\} = P_r\{\underbrace{Y \leq \frac{x-b}{a}}_{Y \in A}\}$$

$$a>0 \quad , \quad X = aY+b$$

$$= \int_A f_Y(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha$$

$$Y \sim N(0,1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

باید رابطه‌ی بالا را برحسب x ، دیفرانسیل x بنویسیم تا به $F_X(x)$ برسیم ، سپس با مشتق‌گیری از آن بتوانیم $f_X(x)$ را به دست بیاوریم

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha$$

تغییر متغیر : $x' = \frac{x-b}{a}$, $\beta = a\alpha + b \rightarrow d\beta = a \, d\alpha$

$$\Rightarrow F_X(x') = \int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-b}{a}\right)^2} \frac{1}{a} \, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{(\beta-b)^2}{2a^2}} \, d\beta$$

$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad X \sim N(b, a^2)$$

$$Y \sim N(0,1) \xrightarrow{X = aY + b} X \sim N(b, a^2)$$

$$Y \sim N(0,1) \xrightarrow[X = \sigma Y + m]{?} X \sim N(m, \sigma^2)$$

حال که ارتباط بین یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد $N(0,1)$ را با یک متغیر تصادفی $N(m,\sigma^2)$ پیدا کردیم، می توانیم از توابع و جداولی که برای کار کردن با نرمال استاندارد معرفی شده اند استفاده کنیم و با در نظر گرفتن رابطه ی بین نرمال استاندارد و متغیر $N(m,\sigma^2)$، به جای محاسبه ی انتگرال های لازم مقادیر متناظر آنها را از جدول های معرفی شده استخراج کنیم.

در ادامه می خواهیم توابعی که در ارتباط با نرمال استاندارد تعریف شده اند و کاربرد زیادی دارند را معرفی کنیم.

a) تابع $F_Y(y)$

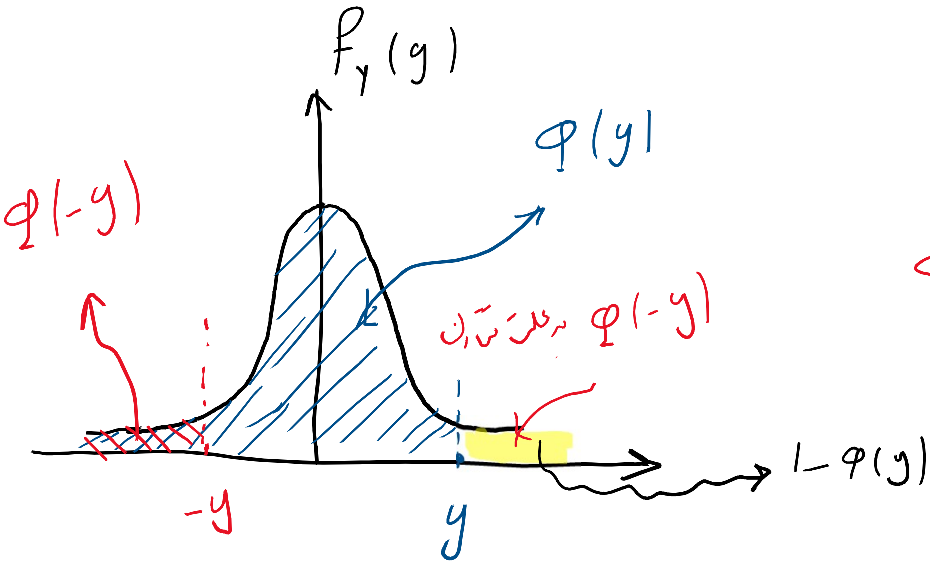
برای یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y داریم،

$$Y \sim N(0,1) \rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_Y(y)}_{P_r\{Y \leq y\}} \triangleq \int_{-\infty}^{y} f_Y(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha \equiv \underbrace{G(y) \equiv \Phi(y)}_{\text{نامگذاری‌های مختلف } F_Y(y)}$$

مقادیر تابع $\Phi(y)$ در قالب جدول هایی در دسترس است.

درمورد $\Phi(y)$ توجه به نکات زیر اهمیت دارد.



$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\alpha)\, d\alpha$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \varphi(-|y|) = 1 - \varphi(|y|) \qquad (1$$

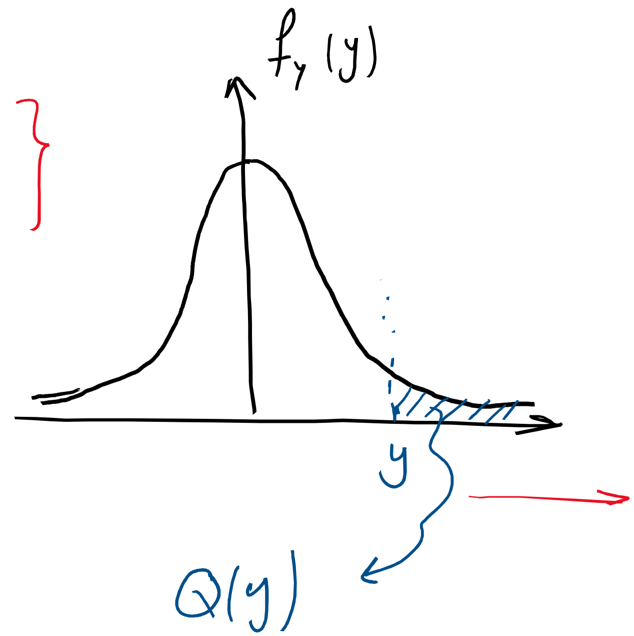
$$\boxed{\underbrace{P_r\{X \leqslant x\}}_{F_X(x)} = \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad X = \sigma Y + m \qquad (2 \\ Y \sim N(0,1), \quad X \sim (m, \sigma^2)}$$

b) Q - function

تابع دیگری که در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y ، تعریف شده، تابع $Q(.)$ است که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$Q(y) = \int_y^{\infty} f_Y(\alpha)\, d\alpha \equiv P_r\{Y > y\}$$

$$\equiv 1 - \Phi(y)$$



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \quad , \quad Y \sim N(0,1)$$

خصوصیات تابع $Q(\ )$ مشابه تابع $\Phi(y)$ است، داریم

$$Q(-|y|) = 1 - Q(|y|) \qquad (1$$

$$P_r\{X > x\} = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad (2$$

$$y \sim N(0,1) \quad , \quad X \sim N(m, \sigma^2)$$

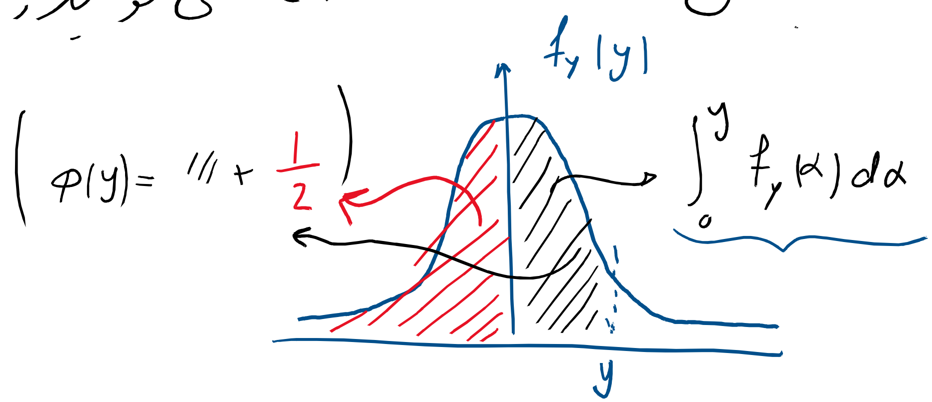
$$X = \sigma Y + m$$

c) error function

تابع دیگری در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد y تعریف شده $erfc(\cdot)$ است

که به آن error function می‌گویند، به صورت زیر بیان می‌شود

$$erfc(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\beta^2} \, d\beta$$



$$\varphi(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, erfc\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{y^2}{2} = \beta^2$$

$$\beta = \frac{y}{\sqrt{2}}$$ تغییر متغیر

تمرین : رابطه بالا را با کمک تغییر متغیر داده شده به دست بیاورید.