به نام خدا

آزمون میان ترم روز یکشنبه ۹۹,۹,۹ ساعت 13 (ساعت کلاس)

کلاس جبرانی روز دوشنبه ۹۹,۹,۱۷ ساعت 10:15

تابع توزیع احتمال

مثال احتمال پیوسته) فرض کنیم یک مکالمه‌ی تلفنی به طور تصادفی در بازه‌ی زمانی $[0, T]$ رخ می‌دهد. برای آن داریم:

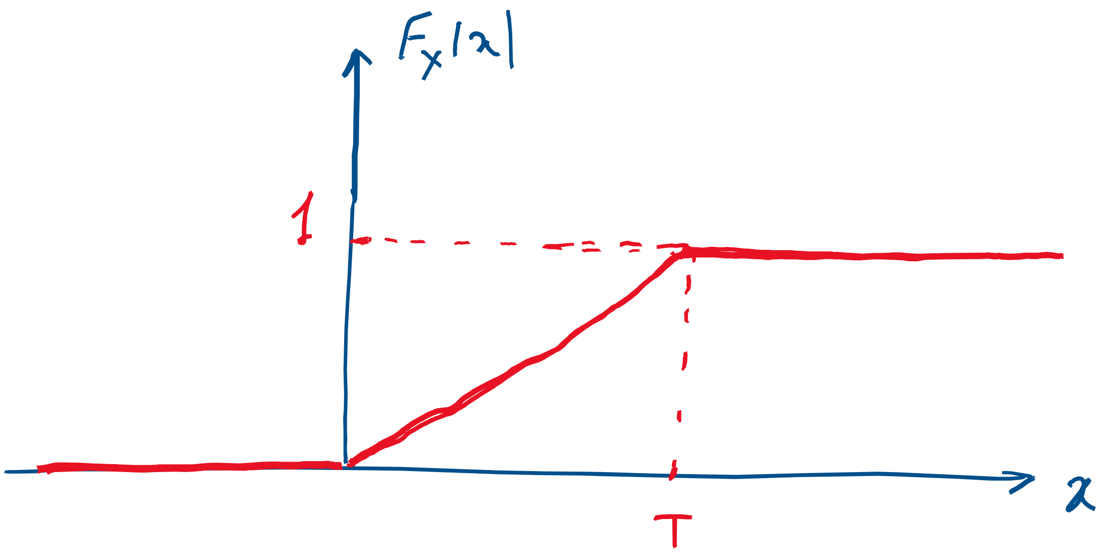
$$P_r\{t_1 \leq t \leq t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

زمان رخ داد مکالمه

اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی زمان رخ داد مکالمه‌ی تلفنی مورد نظر باشد. تابع

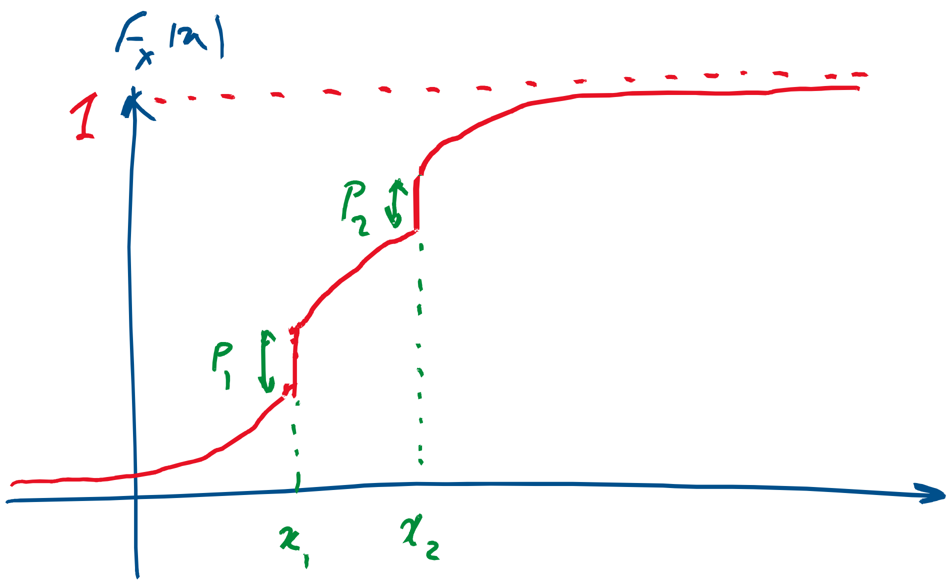
$F_X(x)$ را بدست آورید.

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \le x\} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ P_r\{\overset{t_1}{0} \le \overset{t}{X} \le \overset{t_2}{x}\} = \dfrac{x-0}{T} & 0 \le x \le T \\ P_r\{X \le x,\ x>T\} = 1 & x>T \end{cases}$$



* در متغیرهای تصادفی پیوسته تابع $F_X(x)$ ، تابعی پیوسته از x است.

* در عمل متغیرهای تصادفی ترکیبی نیز وجود دارند. برای این متغیرهای تصادفی تابع $F_X(x)$، تکه‌ای پیوسته است. یعنی $F_X(x)$ تابعی پیوسته از x است با یک یا چند نقطه‌ی جهش دار.



$$P_r\{X=x_1\}=P_1 \quad , \quad P_r\{X=x_2\}=P_2$$

در ادامه ی خواص خصوصیات تابع $F_X(x)$ را بررسی کنیم

$$\boxed{F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \xrightarrow[\text{تابع احتمال}]{\text{خواص}} 0 \leq F_X(x) \leq 1}$$

0) $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$

1) $F_X(-\infty) = 0$

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \leq x\} \implies P_r\{X \leq -\infty\} = P_r\{\varphi\} = 0$$

2) $F_X(\infty) = 1$

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \leq x\} \implies P_r\{X \leq \infty\} = P_r\{\Omega\} = 1$$

3) $\forall x_1 \leq x_2 \; ; \; F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ یعنی

تابع $F_X(x)$ تابعی غیرنزولی از x است.

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \leq x\}$$

زیرا داریم:

$$\forall x_1 \leq x_2 \; ; \; \{X(\zeta) \leq x_1\} \subset \{X(\zeta) \leq x_2\}$$

$$\xrightarrow[\text{احتمال}]{\text{خواص}} \underbrace{P_r\{X(\zeta) \leq x_1\}}_{F_X(x_1)} \leq \underbrace{P_r\{X(\zeta) \leq x_2\}}_{F_X(x_2)} \Longrightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

4) $P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x)$

$F_X(x) = P_r\{X \leqslant x\}$

می دانیم که

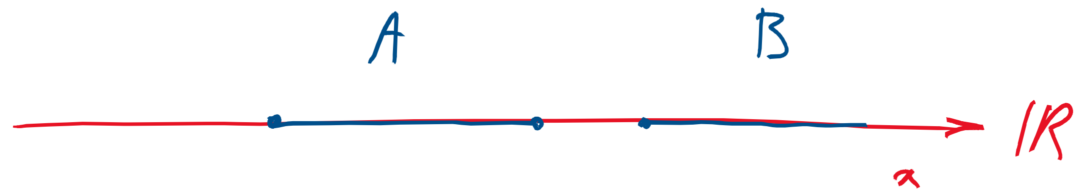
$A = \{X \leqslant x\} \Longrightarrow A^c = \{X > x\}$

, $P(A) + P(A^c) = 1 \Longrightarrow P(A^c) = P_r\{X > x\} = 1 - P(A)$

$$\Longrightarrow P_r\{X > x\} = 1 - \underbrace{P_r\{X \leqslant x\}}_{F_X(x)} = 1 - F_X(x)$$

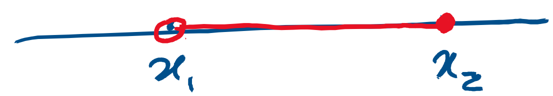
5) $P_r\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

با کمک تابع $F_X(x)$ می‌توان احتمال هر پیشامد در ارتباط با X را محاسبه کرد.



$$\{X \le x_2\} = \underbrace{\{X \le x_1\}} \cup \underbrace{\{x_1 < X \le x_2\}}$$

دو مجموعه جدا از هم



$$\Rightarrow \underbrace{P_r\{X \le x_2\}}_{F_X(x_2)} = \underbrace{P_r\{X \le x_1\}}_{F_X(x_1)} + P_r\{x_1 < X \le x_2\}$$

$$\Longrightarrow \; P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$6) \quad P_r\{X = x_0\} = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ در نقطه } x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ در نقطه } x_0 \text{ دارای جهشی به اندازه } P_0 \text{ باشد} \end{cases}$$

گذران

$$F_X(x_0^-) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x_0 - \epsilon)$$

می‌دانیم که $P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ با قرار دادن $x_2 = x_0$

و میل دادن $x_1 \to x_0$ می‌توان به عبارت بالا رسید

$$\{X = x_0\} = \lim_{\substack{x_2 = x_0 \\ x_1 \to x_0}} \{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\{X = x_0\} = \lim_{\substack{x_2 = x_0 \\ x_1 \to x_0}} \left[F_X(x_2) - F_X(x_1) \right] = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

7) $\forall x_0 \in \mathbb{R};\quad F_X(x_0) = F_X(x_0^+)$

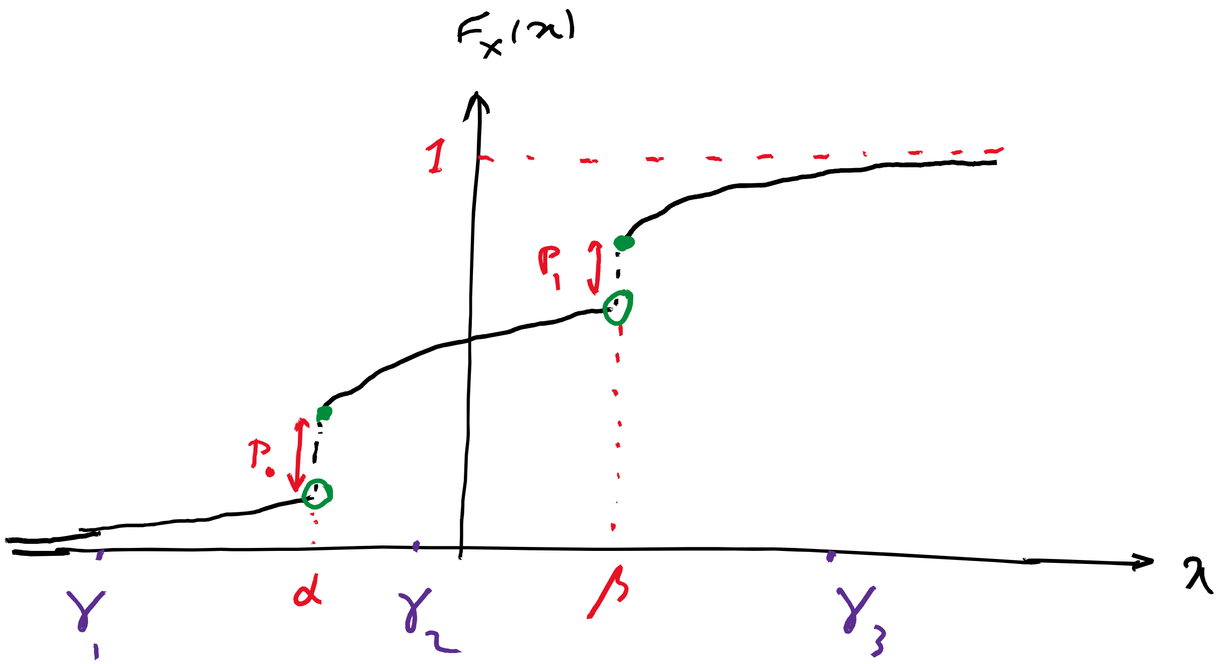
تابع $F_X(x)$ همواره از سمت راست پیوسته است.

$$F_X(x_0^+) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x_0 + \epsilon)$$

کاران

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

به عنوان مثال :



متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی ترکیبی است چون $F_X(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته است.

$$P_r\{X=\alpha\} = P_0 \quad , \quad P_r\{X=\beta\} = P_1$$

$$P_r\{X=\gamma\} = 0$$
$$\gamma \neq \alpha, \beta$$

از بازه‌هایی که $F_X(x)$ پیوسته است، نقاط احتمال ندارند

(برای متغیرهای تصادفی پیوسته، نقاط احتمال ندارند $P_r\{X=x\}=0$)

یادآوری: تابع $g(x)$ را در نقطه‌ی $x = x_0$ پیوسته می‌گوییم اگر تابع $g(x)$ از سمت راست و چپ در نقطه‌ی $x = x_0$ پیوسته باشد. به عبارت دیگر

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} g(x_0 + \epsilon) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} g(x_0 - \epsilon) = g(x_0)$$

$$g(x_0^+) = g(x_0^-) = g(x_0)$$

(PDF) Probability Distribution Function تابع توزیع احتمال

(CDF) Cumulative Distribution Function

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\}$$

پیوسته (متغیرهای تصادفی پیوسته)

پلکانی (متغیرهای تصادفی گسسته)

تکه‌ای پیوسته (برای متغیرهای تصادفی ترکیبی)

ادامه مفهوم چگالی را بیان خواهیم کرد.

صدک Percentile

در یک تابع توزیع احتمال، گاهی برای ما اهمیت دارد که بدانیم متغیر تصادفی X با احتمال u از چه عددی کوچکتر است.

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\} = u$$

$$\Longrightarrow \quad x = F_X^{-1}(u)$$

به x صدک 100u گفته می‌شود.

به عنوان مثال می‌خواهیم بدانیم که متغیر تصادفی X با احتمال 0.85 از چه عددی کوچکتر است. اگر داشته باشیم $x = F_X^{-1}(0.85)$ آنگاه به x صدک 85 گفته می‌شود.

* صدک دهم ، دهک اول نیز گفته می شود. (دهک Decile)

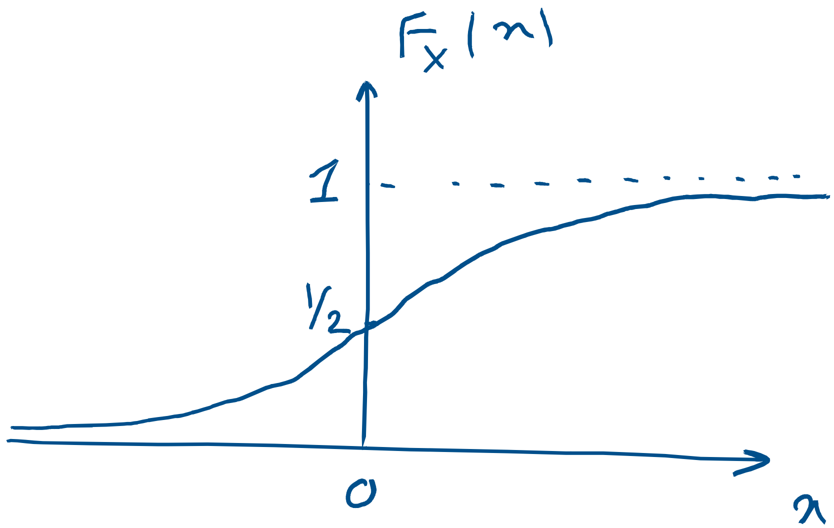
* صدک بیست و پنجم ، چارک اول نیز گفته می شود (چارک Quartile)

یکی از پر کاربردترین صدک ها ، صدک پنجاه است که به آن میانه (median)

متغیر تصادفی گفته می شود

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \implies \text{median} \doteq m = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال: تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

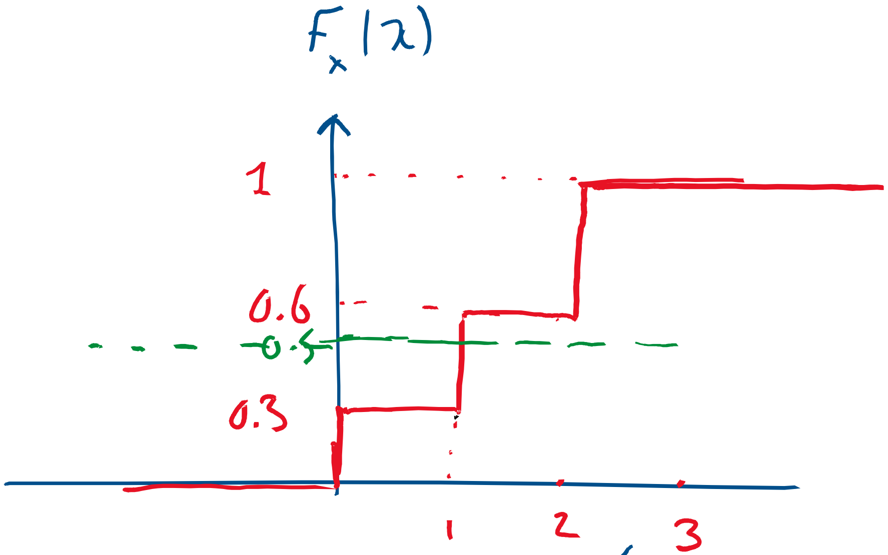


بنابراین میانه‌ی این متغیر تصادفی

برابر است با $F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = m = 0$

* اگر متغیر تصادفی X، یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تعیین میانه با کمک $F_X^{-1}(u)$
امکان‌پذیر نخواهد بود.

به عنوان مثال در تابع توزیع احتمال زیر



$m = 1$

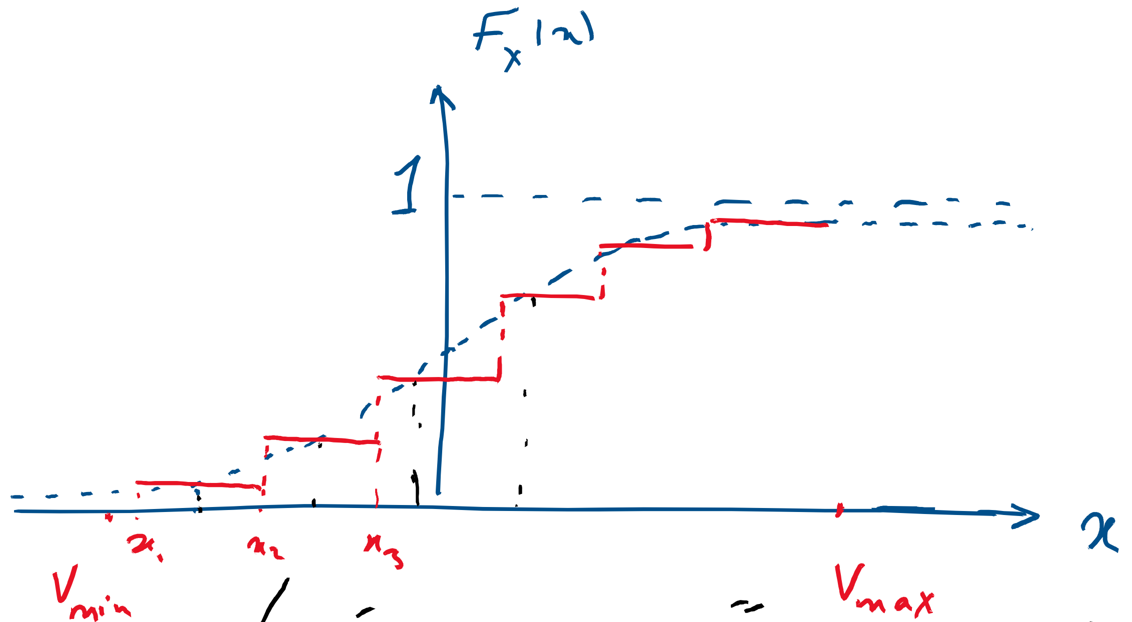
برای اینکه بتوانیم تعریف دقیقی از میانه داشته باشیم - طوری که هم در حالت پیوسته و هم در حالت گسسته قابل استفاده باشد، میانه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{median} = \arg F_x(x) : \begin{cases} P_r\{X \leq m\} \leq \frac{1}{2} \\ , \\ P_r\{X \geq m\} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= m$$

* به دست آوردن تابع توزیع احتمال به صورت تجربی

اگر نتایج یک آزمایش تصادفی را به صورت تجربی در اختیار داشته باشیم، مثلاً از ولتاژ را در سر یک مقاومت در زمان‌های مختلف نمونه‌برداری کرده باشیم، می‌توانیم با کمک این نتایج و نمونه‌ها، تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی مرتبط با این آزمایش را به صورت تقریبی (تجربی) به دست بیاوریم و در نتیجه بتوانیم متغیر تصادفی را تجزیه و تحلیل کنیم.



نتایج آزمایش را برای هر مقدار x مرتب می‌کنیم و مقدار $\frac{n_x}{n}$ را محاسبه و رسم می‌کنیم. هر چه n بزرگتر باشد، نمودار تجربی به نمودار واقعی نزدیک‌تر می‌شود.

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \le x\} \simeq \frac{n_x}{n}$$

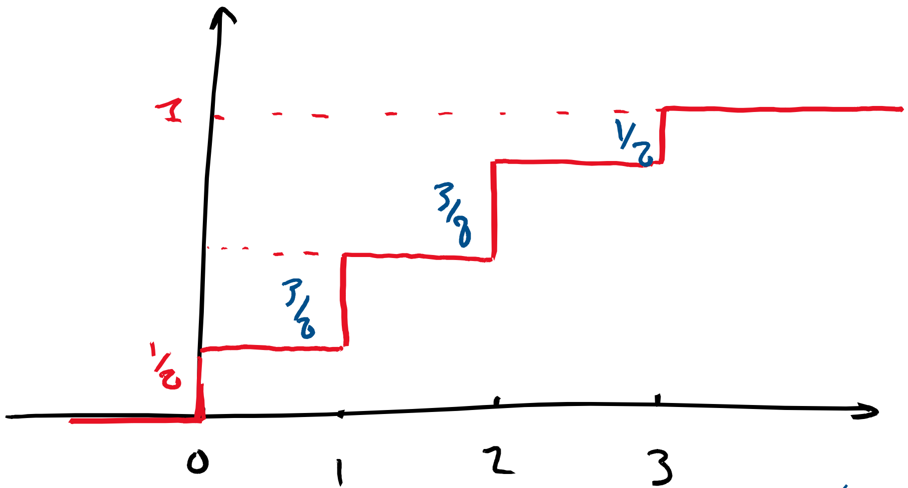
$n =$ تعداد کل آزمایش‌ها و تعداد نتایجی که به ازای آن $\{X \le x\}$ برقرار باشد $= n_x$

مثال: یک سکه ی سالم را سه بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X را برابر تعداد شیرها در این آزمایش های تصادفی در نظر می گیریم. $F_X(x)$ را بدست آورید.

$$X \in \{0,1,2,3\}$$

$$P_r\{X=x\} = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} & x \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} & x \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & oth. \end{cases}$$

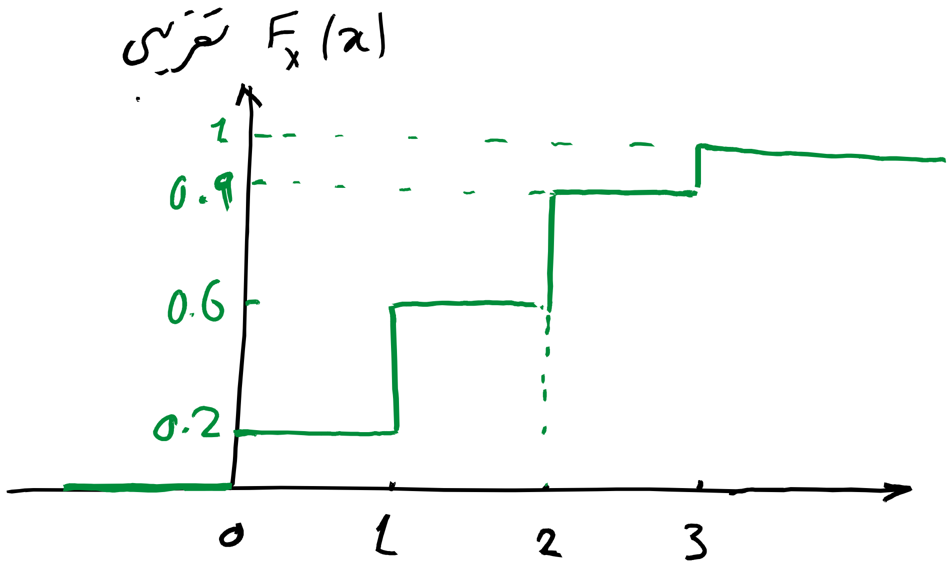


$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{3} P_X(i)\, u(x-i)$$

* این آزمایش را به شکل تجربی ده بار تکرار کرده‌ایم و به نتایج زیر رسیده‌ایم. $F_X(x)$ را به صورت تجربی به دست آورده و رسم کنید.

x	0 (n_0)	1	2	3
تعداد	2	4	3	1

$\longrightarrow \quad n = 10$



$$n_3 = 2+4+3+1 \rightarrow F_X(x)\Big|_{x=3} = \frac{10}{10}$$

$$n_0 = 2 \longrightarrow F_X(x)\Big|_{x=0} = \frac{n_0}{n} = \frac{2}{10} \cong P_r\{X \leq 0\}$$

$$n_1 = 2+4 \longrightarrow F_X(x)\Big|_{x=1} = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{10} \cong P_r\{X \leq 1\}$$

$$n_2 = 2+4+3 \longrightarrow F_X(x)\Big|_{x=2} = \frac{n_2}{n} = \frac{9}{10} = P_r\{X \leq 2\}$$

در ادامه ابزار دیگری برای کار کردن با متغیرهای تصادفی معرفی خواهیم کرد که به
آن تابع چگالی احتمال می‌گوییم.

* تابع چگالی احتمال   Probability density function (pdf)

تابع چگالی احتمال، تابعی است که مفهوم آن شبیه چگالی جرمی است. همان طور
که برای به دست آوردن جرم یک شئ از تابع چگالی جرمی آن روی واحد سطحی (یا طولی یا
حجمی) آن انتگرال‌گیری می‌کنیم، برای به دست آوردن احتمال یک پیشامد در ارتباط با
متغیر تصادفی X نیز از تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی روی آن پیشامد، انتگرال‌گیری می‌کنیم.

بنابراین تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود،

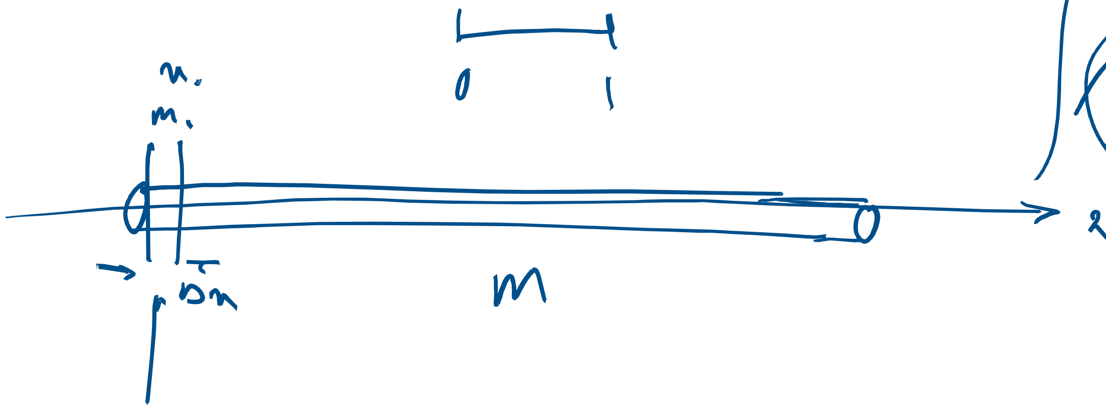
$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$$

در ادامه خصوصیات تابع چگالی احتمال را بررسی می‌کنیم.

$$\Longrightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha + C$$

می‌دانیم که $F_X(-\infty) = 0$ بنابراین

$$\underbrace{F_X(-\infty)}_{0} = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\, d\alpha}^{0} + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$



$$\int \rho_x(x)\,dx = m$$

$$\rho_x(x) = \frac{d}{dx} \text{ توزیع جرم}$$

$$\rho_x(x)\,\Delta x$$

$$\sum \rho_x(x)\,\Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int \rho_x(x)\,dx = m$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_X(x) = \dfrac{d}{dx} F_X(x) \\[2ex] F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha \end{cases} \qquad (1$$

2) $\forall\, x \in \mathbb{R};\quad f_X(x) \geq 0$

چون $F_X(x)$ یک تابع غیرنزولی از x است در نتیجه مشتق آن ($f_X(x)$)
همواره بزرگتر یا مساوی صفر است

$$3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\,d\alpha = 1$$

می دانیم،

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha \;\xRightarrow[F_X(x)\to 1]{x\to+\infty}\; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\,d\alpha = 1$$

$$4)\quad P_r\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\alpha)\,d\alpha \equiv F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

احتمال هر پیشامدی در راستای X ، مساوی انتگرال تابع چگالی احتمال روی آن پیشامد است

$P_r\{x_1 < X \le x_2\} = P_r\{X \le x_2\} - P_r\{X \le x_1\}$ (اثبات به عنوان تمرین)

به طور کلی

$$P_r\{X \in A\} = \int_A f_x(\alpha)\,d\alpha$$

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

5) $$P_r\{X = x_0\} = \int_{x_0^-}^{x_0} f_X(\alpha)\,d\alpha \equiv F_X(x_0) - F_x(x_0^-)$$

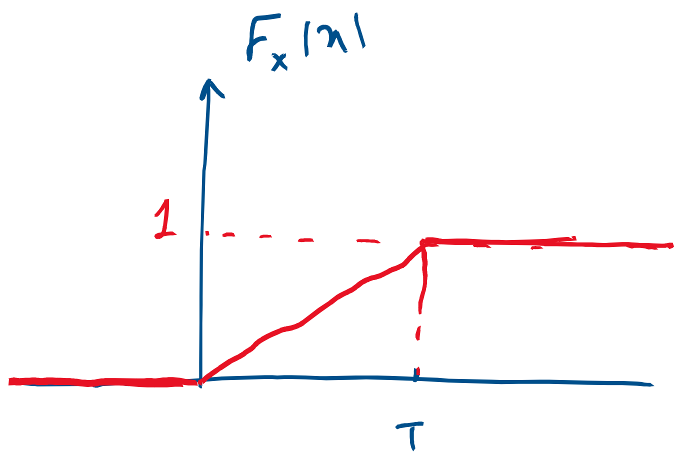
$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } f_x(x) \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } f_x(x) \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ دارای ضربه‌ای به وزن } P_0 \text{ باشد} \end{cases}$$

بر اساس تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته با کمک تابع جرم احتمال آنها و
تابع ضربه قابل بیان است.

$$f_X(x) = \sum_i P_X(i)\,\delta(x-i)$$

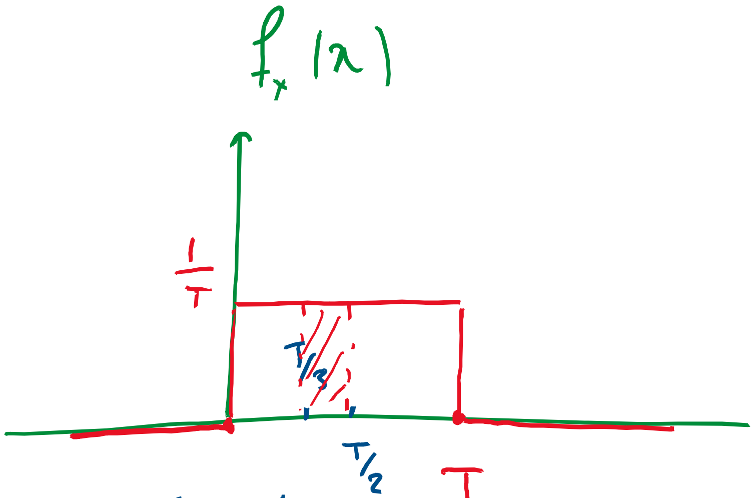
$$P_X(i) = P_r\{X = i\} \quad : \quad \text{Pmf}$$

مثال : در جلسه‌ی گذشته، مثالی از زمان رخ دادن یک مکالمه تلفنی بیان کردیم و تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی مربوط به آن را به دست آوردیم. برای این متغیر تصادفی تابع چگالی احتمال را به دست آورده و رسم کنید.



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x \geq T \\ \frac{x}{T} & 0 \leq x \leq T \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \leq x \leq T \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



* با یک تابع چگالی احتمال. احتمال این پیش آمد را به دست بیاورید که مکالمه در بازه ی زمانی $\left[\frac{T}{3}, \frac{T}{2}\right]$ رخ داده باشد

$$P = \int_{T/3}^{T/2} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{T/3}^{T/2} \frac{1}{T}\, d\alpha = \frac{1}{T}\, \alpha \Big|_{T/3}^{T/2} = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

به عنوان تمرین: احتمال پیش آمد مثال قبل را با کمک تابع توزیع احتمال نیز به دست بیاورید.

مثال: مدت زمان کارکرد یک وسیله‌ی الکترونیکی قبل از خرابی یک متغیر تصادفی x است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & oth \end{cases}$$

(مدت زمان برحسب روز)

احتمال پیشامدهای زیر را به دست بیاورید.

پیش آمد A : اینکه این وسیله‌ی الکترونیکی کمتر از 100 روز کار کند.

پیش آمد B : اینکه این وسیله‌ی الکترونیکی بین 50 تا 150 روز کار کند.

$$P_A = \int_A f_x(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{100} f_x(\alpha)\,d\alpha$$

$$P_B = \int_B f_x(\alpha)\,d\alpha = \int_{50}^{150} f_x(\alpha)\,d\alpha$$

با توجه به اینکه λ مشخص نیست، باید ابتدا مقدار λ را به دست بیاوریم.

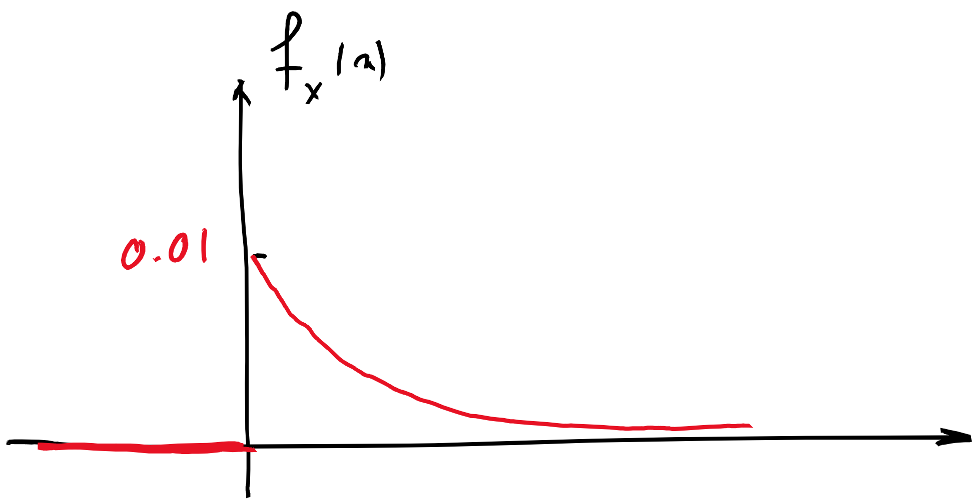
می‌دانیم،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(\alpha)\, d\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha = \lambda \left(-100\, \underbrace{e^{-\frac{\alpha}{100}}}_{(0-1)}\right|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow 100\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

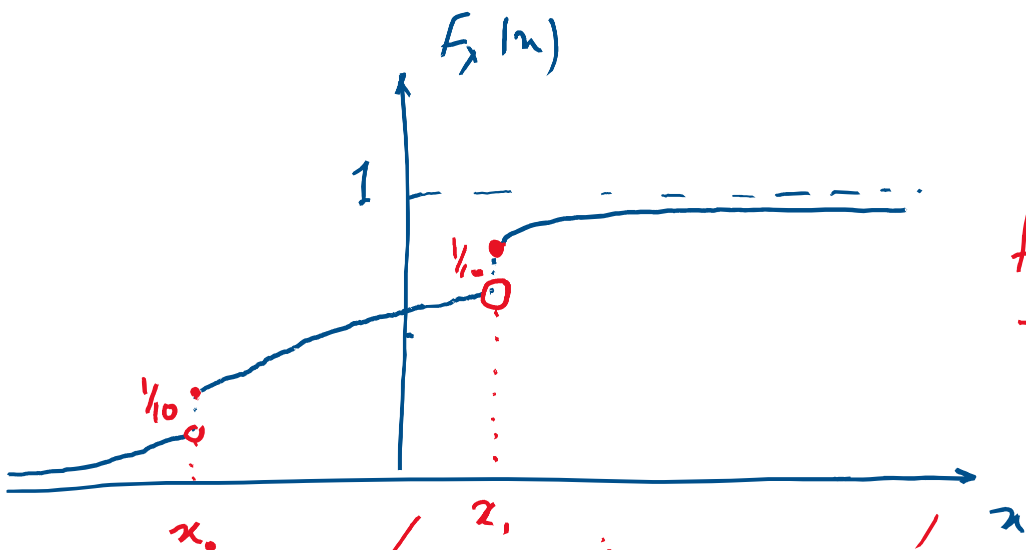
$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$P_A = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}} \, d\alpha = -e^{-\alpha/100} \Big|_0^{100} = 1 - e^{-1} \simeq 0.68$$

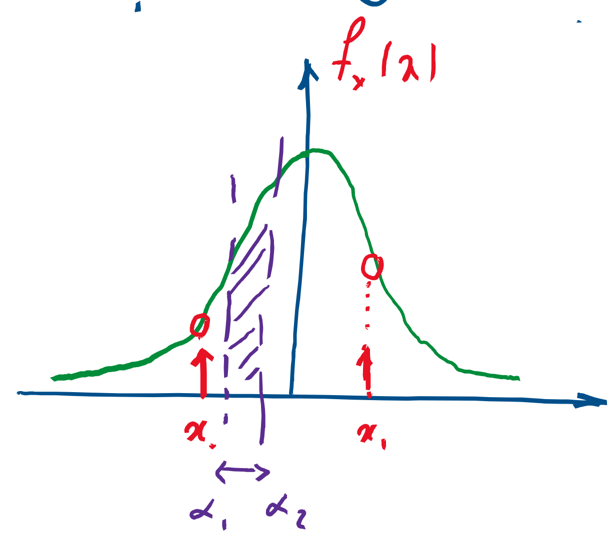
$$P_B = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx = -e^{-x/100}\Big|_{50}^{150} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$$

مثال: فرض کنیم که تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد. تابع چگالی احتمال آن را بدست آورید.



گاهی پیوسته ـ متغیر تصادفی ترکیبی

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$



$$P_r\{X = x_0\} = \frac{1}{10}, \quad P_r\{X = x_1\} = \frac{1}{10}$$

$$P_r\{X = \beta\} = 0$$

$$\beta \neq x_0, x_1$$

$$P_r\{\alpha_1 < X \leq \alpha_2\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

۵- به دست آوردن $f_X(x)$ به صورت تجربی (هیستوگرام)

اگر بخواهیم تابع $f_X(x)$ را از روی نتایج تجربی آزمایش های تصادفی به دست بیاوریم، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$P_r\{x < X \le x+\Delta x\} = f_X(x)\,\Delta x$$ (برای Δx کوچک)

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}^{P_r\{x < X \le x+\Delta x\}}}{\Delta x}$$

$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = \frac{P_r\{x < X \le x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

حال اگر آزمایش را n بار تکرار کرده باشیم و تعداد نتایجی که برای آنها رابطه‌ی $\{x < X \le x+\Delta x\}$ برقرار است، برابر n'_x باشد، خواهیم داشت.

$$f_X(x) \cong \frac{n'_x}{n\,\Delta x}$$

هرچه Δx کمتر باشد، دقت نمودار بیشتر خواهد بود.