به نام خدا

ahaghbin@gmail.com

JPG2pdf.com

Subject : تمرین سری x آمار و احتمال - نام و نام خانوادگی

- متغیر تصادفی Random Variable (RV)

در بحث آمار و احتمال با فضای احتمال به صورت (Ω, P, F) سروکار داریم.

Ω: فضای نمونه

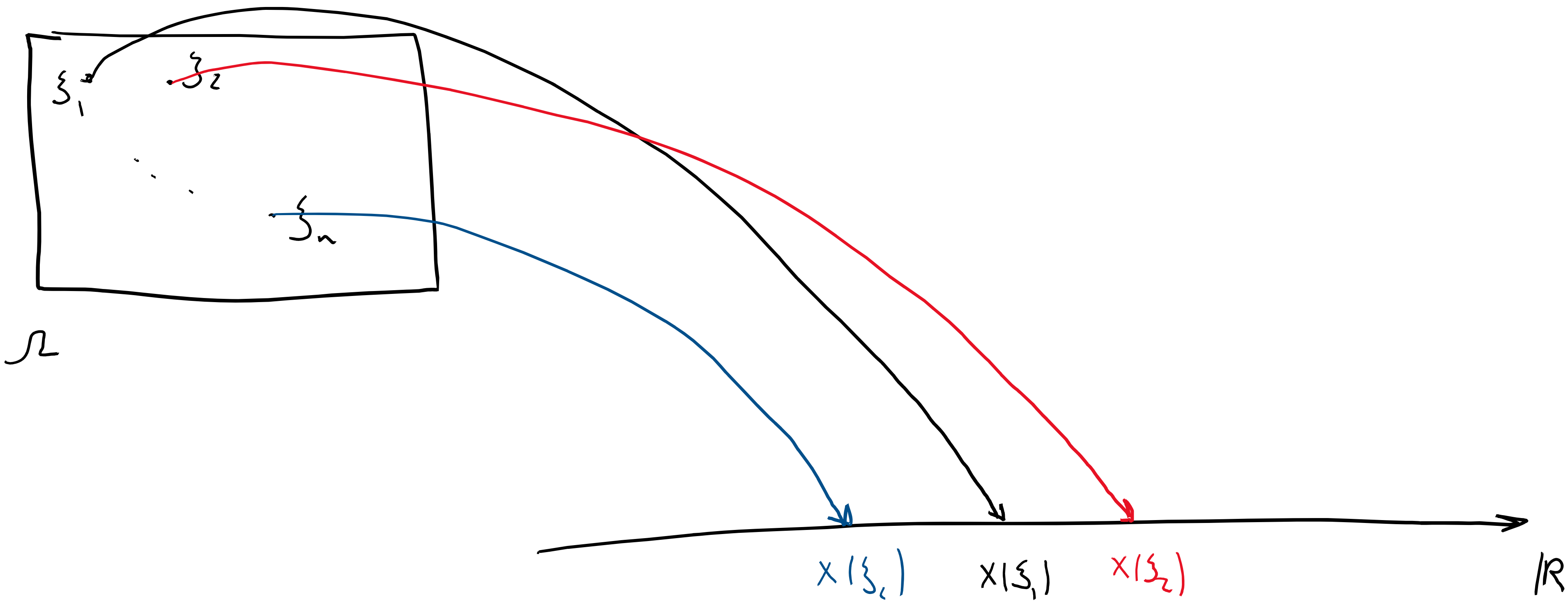
P: تابع احتمال

F: میدان Borel Field

مجموعه‌ای از تمام پیشامدهای احتمال‌پذیر

در عمل در فضای احتمال با پیش آمدهایی سر و کار داریم که می توانند شامل نتایج عددی و غیرعددی باشند. از نظر هندسی ما علاقه مند هستیم که در فضایی کار کنیم که با نتایج عددی سر و کار داشته باشیم. بنابراین نیاز به یک تصویر از فضای احتمال به فضای اعداد حقیقی داریم. از این جهت متغیر تصادفی را تعریف می کنیم.

متغیر تصادفی $X(\xi)$ تابعی است که نتایج غیرعددی فضای نمونه را به نتایج عددی روی محور اعداد حقیقی تصویر می کند. به عبارت دیگر $X(\xi)$ تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می دهد.



$X(\xi)$: متغیر تصادفی (تابعی از ξ)

با بیان ریاضی می‌توان نوشت

$$\Omega \xrightarrow{X(\cdot)} \mathbb{R} \qquad \text{یا} \qquad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

به این ترتیب از فضای احتمال به صورت (Ω, P, F) به فضای اعداد حقیقی در متغیرهای تصادفی

به صورت $(\mathbb{R}, P, \mathbb{B})$ می‌رسیم.

هدف این است که در فضای اعداد حقیقی بتوانیم با متغیرهای تصادفی کار کنیم، خصوصیات آنها را استخراج کنیم و احتمال هر پیش‌آمدی در ارتباط با متغیرهای تصادفی را محاسبه کنیم. برای این منظور نیاز به ابزارهایی برای کار با متغیرهای تصادفی داریم که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم. باید به این نکته توجه داشته باشیم که

در این فضای جدید ، تابع احتمال را به عنوان یک تابع مهم و کاربردی برای کار با متغیرهای تصادفی تعریف

بازه‌های ζ را در فضای جدید ، در اختیار داریم

مثال : آزمایش پرتاب سکه را در نظر بگیرید می‌توانیم به ترتیب زیر برای این آزمایش یک متغیر تصادفی تعریف کنیم. فرض می‌کنیم احتمال شیر آمدن برابر P باشد $\longleftarrow$ احتمال خط آمدن برابر $1-P$ است.

آزمایش تصادفی = یکبار پرتاب سکه

$$\Omega = \{\underset{\zeta_1}{H}, \underset{\zeta_2}{T}\}$$

نتایج آزمایش تصادفی =
$$\begin{cases} \zeta_1 : H & \text{شیر آمدن} \\ \zeta_2 : T & \text{خط آمدن} \end{cases}$$

$P_r\{H\} = p \quad , \quad P_r\{T\} = 1-p$

متغیر تصادفی متناظر با این آزمایش تصادفی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$X(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi = H = \xi_1 \\ -1 \text{ یا } 0 & \xi = T = \xi_2 \end{cases}$$

(با احتمال p پیش آمد شیر رخ دهد)

(با احتمال $1-p$ پیش آمد خط رخ دهد)

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی مقادیری از مجموعه اعداد حقیقی را اختیار می‌کند.

در این مثال $X(\xi)$ مقدار $+1$ و -1 را اختیار می‌کند

$$X(\xi) = x \quad , \quad x \in \{1, -1\}$$

متغیر تصادفی

مقدار

مجموعه مقادیری که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند.

قرارداد: متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ Capital letters نمایش می‌دهیم و مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند، با حروف کوچک small letters نمایش می‌دهیم

به صورت خلاصه

$$\Longrightarrow \quad X(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

(این متغیر تصادفی را متغیر تصادفی برنولی نیز می‌گوییم)

مثال - آزمایش پرتاب سکه را سه بار به صورت مستقل تکراری کنیم. می خواهیم در ارتباط با این آزمایش یک متغیر تصادفی $Y(\xi)$ به صورت زیر تعریف کنیم

مقدارهایی که متغیر تصادفی اختیار می کند

$Y(\xi)$: نشان دهنده ی تعداد شیرها در آزمایش تصادفی تکراری $\quad Y =$

در سه بار پرتاب مستقل سکه

$$\xi \in \Omega \equiv \Omega_3 = \{ \overbrace{(T,T,T)}^{y=0}, \overbrace{(H,T,T)}^{y=1}, \overbrace{(H,H,T)}^{y=2}, \ldots, \overbrace{(H,H,H)}^{y=3} \}$$

دارای 8 عضو است

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$Y(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{با احتمال ?} \\ 1 & \text{با احتمال ?} \\ 2 & \text{با احتمال ?} \\ 3 & \text{با احتمال ?} \end{cases}$$

$$P_r\{Y(\xi) = y\} = \binom{3}{y} p^y (1-p)^{3-y}$$

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}$$

مثال: فرض کنیم سکه را n بار به صورت مستقل پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی $Y(\xi)$ که نشان دهنده‌ی تعداد شیرها در n بار پرتاب سکه است به صورت زیر خواهد بود

$$P_r\{Y(\xi)=y\} = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

(متغیر تصادفی دو جمله‌ای)

$$y \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

همان طور که گفتیم، برای کار کردن با متغیرهای تصادفی نیاز به ابزارهایی داریم که در ادامه به معرفی آنهای می‌پردازیم به طور خاص برای شروع به دنبال ابزارهایی هستیم که با کمک آنها بتوانیم احتمال هر پیشامدی در ارتباط با متغیر تصادفی $X(\xi)$ را به دست بیاوریم.

ابتدا یک دسته بندی کلی برای متغیرهای تصادفی در نظر می گیریم. متغیرهای تصادفی را به دو دسته کلی

متغیرهای تصادفی گسسته و متغیرهای تصادفی پیوسته دسته بندی می کنیم.

۱- متغیر تصادفی گسسته (Discrete)

اگر متغیر تصادفی $X(\xi)$ مقادیری از یک مجموعه شمارش پذیر مانند $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

را اختیار کند، آن را متغیر تصادفی گسسته می گوییم.

مثال ۱: متغیر تصادفی $Y(\xi)$ در مثال قبل که نشان دهنده ی تعداد رخداد شیرها در n بار پرتاب سکه است

و مقادیری از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ را اختیار می کند، یک متغیر تصادفی گسسته است.

۲- متغیر تصادفی پیوسته

اگر متغیر تصادفی $X(\xi)$ مقادیری از یک محدوده شمارش ناپذیر (پیوسته) را اختیار کند، آن را متغیر تصادفی پیوسته می‌گوییم.

به عنوان مثال: متغیر تصادفی که نشان دهنده ولتاژ دو سر یک مقاومت در یک مدار الکتریکی است، یک متغیر تصادفی پیوسته است که می‌تواند مقادیری در بازه‌ی $[a, b]$ را اختیار کند.

(به یاد داریم و به صورت ریاضی نیز مطرح می‌کنیم که در متغیر تصادفی پیوسته احتمال نقاط برابر صفر است یعنی احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دارای مقداری برابر α باشد برابر صفر است.)

$$\underset{\alpha \in [a,b]}{P_r\{X(\xi) = \alpha\} = 0}$$

در ادامه متغیر تصادفی گسسته $X(\xi)$ را در نظر می‌گیریم که مقادیری از یک مجموعه شمارش‌پذیر به صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ را اختیار می‌کند. با توجه به مطالبی که در کلاس‌های قبلی داشتیم، احتمال پیشامدهای به فرم $\{X(\xi) = x_i\}$ را می‌توانیم محاسبه کنیم. بر این اساس تابع جرم احتمال

Probability mass function (pmf)

را برای یک متغیر تصادفی گسسته $X(\xi)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_X(x_i) \triangleq P_r\{X(\xi) = x_i\} \underset{\uparrow}{=} P_r\{X = x_i\}$$

برای خلاصه نویسی

(برای خلاصه نویسی $X(\xi) \equiv X$ ، ξ را مستتر در نظر می‌گیریم)

تابع pmf اولین ابزاری است که در این بخش برای کار کردن با متغیرهای تصادفی گسسته معرفی کردیم.

$$\Rightarrow P_X(x_i) = \begin{cases} P_r\{X = x_i\} & ; \quad x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \\ 0 & ; \quad oth. \end{cases}$$

* با توجه به خصوصیات تابع احتمال می توان نوشت

$$\sum_{x_i} P_X(x_i) = 1$$

* با کمک تابع جرم احتمال pmf می‌توان احتمال هر پیشامدی در ارتباط با متغیر تصادفی گسسته X را به دست آورد

$$P_r\{X \in A\} = \sum_{x \in A} P_X(x)$$

A : یک ناحیه در فضای یک بعدی زیر مجموعه‌ی فضایی که X در آن تعریف شده است

مثال : فرض کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد رخداد شیر در n بار پرتاب مستقل یک سکه است.

تابع جرم احتمال این متغیر تصادفی را به دست بیاورید.

$$X(\xi) = x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} P_r\{X = x\} & ; \ x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & ; \ oth \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; \ x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & ; \ oth \end{cases}$$

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دو جمله‌ای

(Binomial RV)

- متغیر تصادفی برنولی برای مدل‌سازی آزمایش‌هایی که فقط دو حالت در نتایج آنها ظاهر می‌شود، کاربرد دارد.

- حال اگر آزمایش تصادفی برنولی را n بار تکرار کنیم و یکی از دو حالت را مد نظر بگیریم، متغیر تصادفی دوجمله‌ای نشان دهنده‌ی تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در n بار تکرار آزمایش تصادفی است.

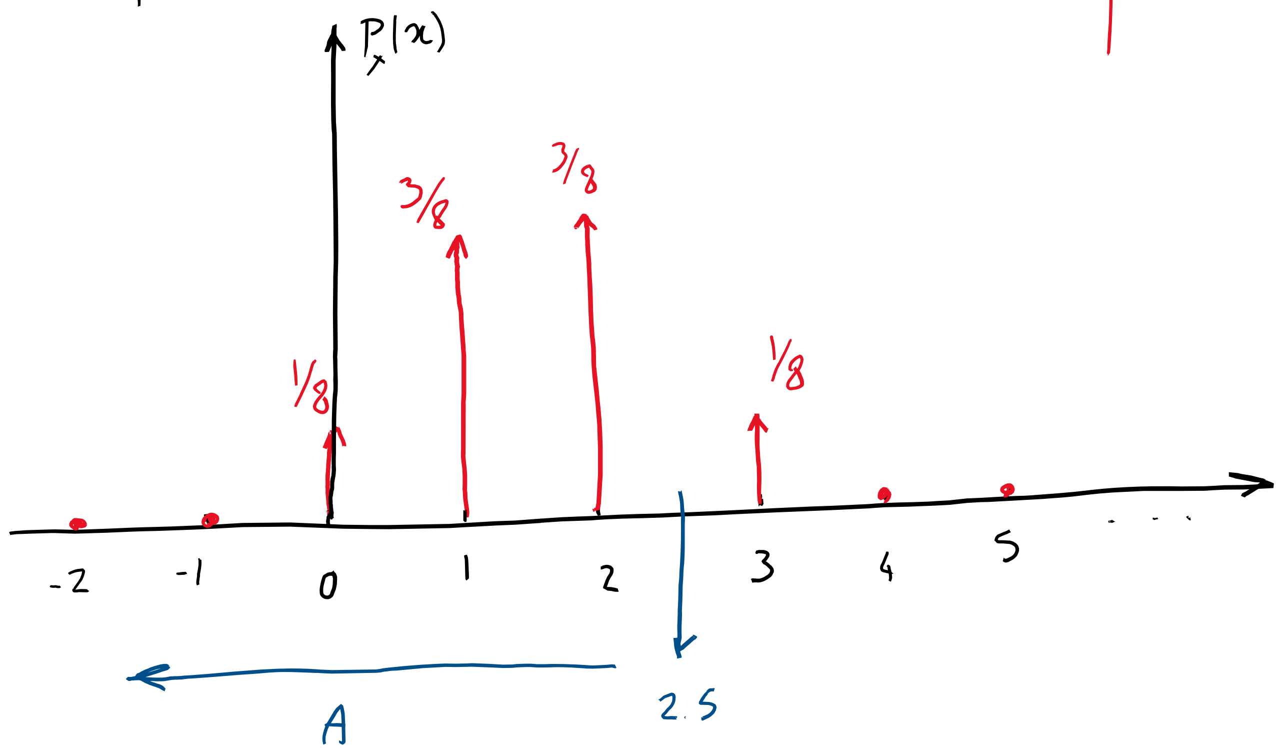
به عنوان یک مثال عددی، برای $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$ تابع pmf متغیر تصادفی دوجمله‌ای را به دست آورده و رسم کنید.

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \{0,1,2,3\} \quad , n=3 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^3 & x \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$P_X(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $P_X(1) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$P_X(2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $P_X(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

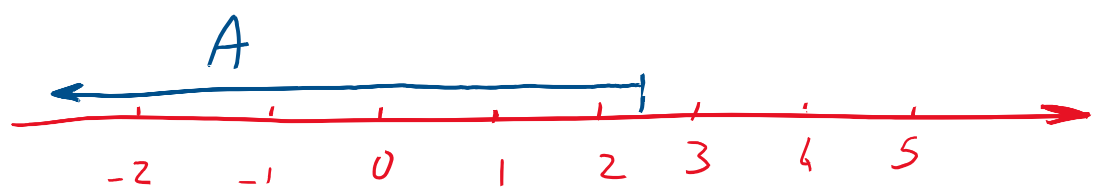


همان طور که گفتیم احتمال هر پیش آمدی در ارتباط با X را می‌توان با استفاده از $P_X(x)$ محاسبه کرد.

در مثال قبل احتمال پیش آمد $\{\underbrace{X \leq 2.5}_{x \in A}\}$ را محاسبه کنید.

$$P_r\{X \in A\} \equiv P_r\{X \leq 2.5\} = P_r\{X=2 \overset{\cup}{\text{یا}} X=1 \overset{\cup}{\text{یا}} X=0\}$$

$$= P_r\{X=2\} + P_r\{X=1\} + P_r\{X=0\} = \sum_{x \in A} P_X(x)$$



$$\Rightarrow P_r\{X \leq 2.5\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

تابع pmf برای متغیرهای تصادفی پیوسته قابل استفاده نیست زیرا همان طور که گفتیم در این متغیرهای تصادفی احتمال نقاط برابر صفر است. در ادامه می‌خواهیم ابزارها (توابعی) تعریف کنیم که هم برای متغیرهای تصادفی گسسته و هم برای متغیرهای تصادفی پیوسته قابل بیان باشد.

- تابع توزیع احتمال یا تابع توزیع تجمعی

تابع توزیع احتمال — Probability Distribution Function (PDF)

تابع توزیع تجمعی — Cummulative Distribution Function (CDF)

برای متغیر تصادفی X ، تابع توزیع احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\underbrace{F_X(x)} \triangleq P_r\{X \leq x\} \equiv P_r\{X(\xi) \leq x\} \equiv P_r\{\xi \mid X(\xi) \leq x\}$$

نماد تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X

این تابع برای متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته قابل بیان است.

* برای متغیرهای تصادفی گسسته فرم این تابع به صورت پلکانی است از این نظر واژه‌ی CDF برای آن شهود دقیق‌تری دارد

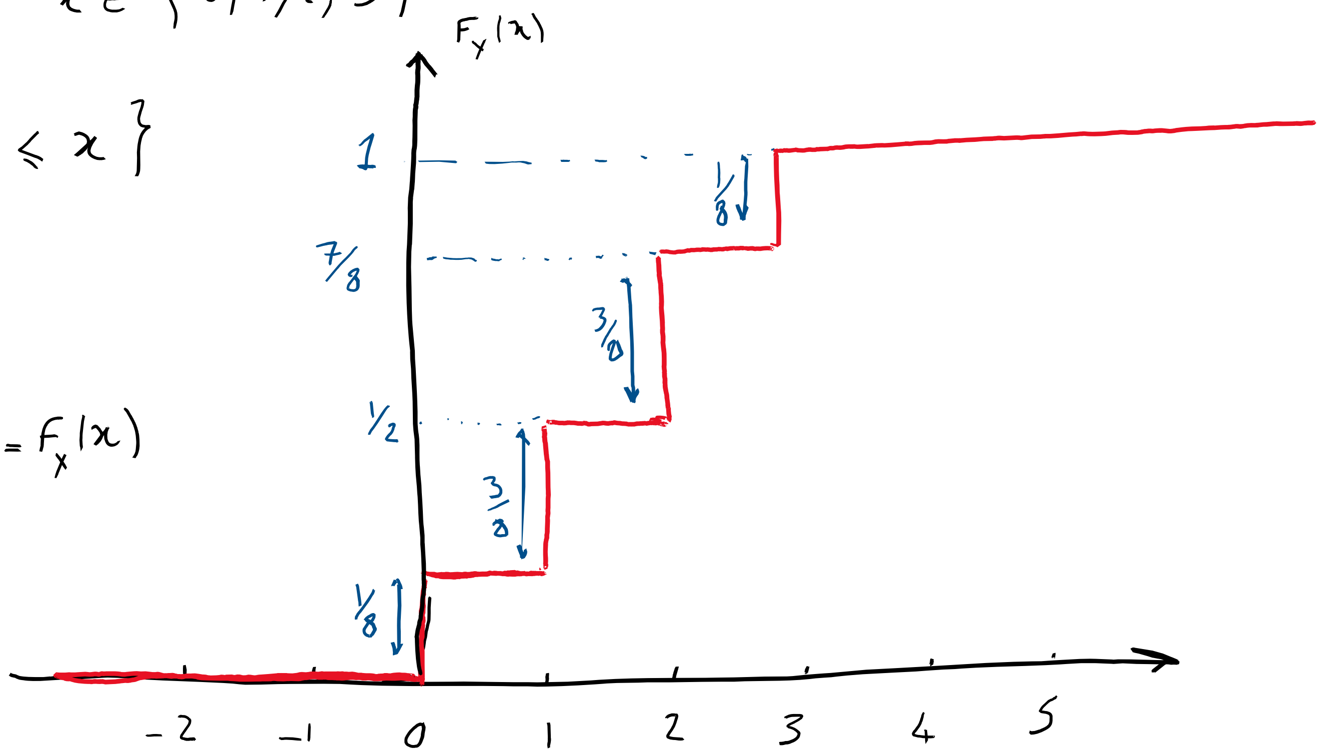
این موضوع را با یک مثال بررسی می‌کنیم.

مثال: در متغیر تصادفی دوجمله‌ای مثال قبل $(n=3,\ p=\frac{1}{2})$ تابع $F_X(x)$ را بدست آورده، رسم کنید

$$X(\xi) = x, \qquad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$F_X(x) \triangleq P_r\{X \leq x\}$$

$$\sum_{i=0}^{3} P_X(i)\, u(x-i) = F_X(x)$$



برای متغیرهای تصادفی گسسته، فرم $F_X(x)$ به صورت پلکانی است و با کمک تابع پله قابل بیان است

$$F_X(x) = \sum_i P_X(i)\, u(x-i)$$

مقادیری که X اختیار کند

یادآوری: تابع پله واحد

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$