ahaghbin@gmail.com
JPG2pdf.com

به نام خدا

آزمایش های تکراری

منظور از آزمایش های تکراری، تکرار یک آزمایش تصادفی در شرایط یکسان و به صورت مستقل است.

به طور مثال در آزمایش پرتاب سکه، اگر آزمایش را در شرایط یکسان و به صورت مستقل تکرار کنیم، یک آزمایش تکراری خواهیم داشت.

اگر فضای نمونه آزمایش تصادفی (ساده) برابر Ω باشد و آزمایش را n بار تکرار کنیم. فضای نمونه ی آزمایش تکراری ما یک فضای نمونه جدید است که آن را با Ω_n نمایش می دهیم.

داریم

$$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{\text{ضرب دکارتی } \Omega \text{ در خودش به تعداد } n \text{ بار}}$$

مثال: در آزمایش تکراری ۵ بار پرتاب سکه، فضای نمونه را بدست بیاورید.

فضای نمونه‌ای $\Omega = \{H, T\}$

آزمایش پرتاب سکه (یک بار)

$$\Omega_5 = \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$$

آزمایش دوم — آزمایش چهارم

$$= \{ \underbrace{(H, H, H, H, H), (H, H, H, H, T), \ldots, (T, T, T, T, T)}_{\text{تعداد اعضای } \Omega_5 \text{ برابر } 2^5 \text{ است.}} \}$$

نتیجه آزمایش اول — آزمایش دوم — آزمایش سوم

تعداد اعضای Ω_5 برابر 2^5 است.

* اگر سکه را دو بار پرتاب کنیم،

$$\Omega_2 = \Omega \times \Omega$$

$$= \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}$$

* اگر آزمایش تصادفی مورد نظر دارای فضای نمونه Ω با m عضو باشد و این آزمایش را n بار تکرار کنیم، فضای نمونه حاصل یعنی Ω_n دارای تعداد m^n عضو است.

در ادامه هدف ما این است که بتوانیم احتمال پیشامدهایی که در ارتباط با آزمایش‌های تکراری تعریف می‌شوند را به دست بیاوریم. در این راستا در این نکته توجه می‌کنیم که این پیشامدها در ارتباط با تکرارهای مستقل یک آزمایش تصادفی در شرایط یکسان تعریف شده‌اند.

مثال: فرض کنیم سکه‌ای داریم که در آن احتمال آمدن شیر برابر P باشد یعنی

$$P_r\{H\} = P \longrightarrow P_r\{T\} = 1-P \quad , \quad \Omega = \{H, T\}$$

این سکه را 5 بار پرتاب می‌کنیم. احتمال پیش‌آمدهای زیر را به دست بیاورید.

۱- پیش‌آمد آنکه دو بار اول شیر بیاید و سه بار بعدی خط بیاید. $\equiv$ پیش‌آمد A

۲- پیش‌آمد آنکه دو بار شیر بیاید. $\equiv$ پیش‌آمد B

$$P_r\{A\} = P_r\{(H, H, T, T, T)\} = P_r\{\underbrace{\underbrace{(T, H, T, H, T)}_{(1-p)\,p\,(1-p)\,p\,(1-p)}}_{p^2(1-p)^3}\}$$

شیر آزمایش اول — شیر آزمایش دوم — آزمایش سوم — چهارم — آزمایش پنجم

$$= P_r\{\text{بار اول شیر بیاید} \cap \text{بار دوم شیر بیاید} \cap \text{بار سوم خط} \cap \text{بار چهارم خط} \cap \text{بار پنجم خط}\}$$

$$= P_r\{\text{بار اول شیر}\}\, P_r\{\text{بار دوم شیر}\}\, P_r\{\text{بار سوم خط}\}\, P_r\{\text{بار چهارم خط}\}\, P_r\{\text{بار پنجم خط}\}$$

استقلال پیش آمدها

$$= P \times P \times (1-P) \times (1-P) \times (1-P) = P^2(1-P)^3$$

$$P_r\{B\} = \underbrace{\binom{5}{2}}\, p^2(1-p)^3$$

(ترتیب رخ دادن شیرها مهم نیست)

که تعداد حالت‌هایی که دو بار شیر در
پنج آزمایش‌های تکراری دیده می‌شود

$(\_ , \_ , \_ , \_ , \_)$

$$P(B) = P\Big\{ \underbrace{\text{بار اول و دوم شیر}}^{p^2(1-p)^3} \text{ یا } \underbrace{\text{بار اول و سوم}}^{p^2(1-p)^3} \text{ یا } \dots \text{ یا } \underbrace{\text{بار چهارم و پنجم}}^{p^2(1-p)^3} \Big\} = \sum$$

پیشامد بار اول و دوم شیر بیاید

$\binom{5}{2}$ = تعداد این حالت‌ها

$$P_r\{B\} = P_r\{(H,H,T,T,T) \cup (H,T,H,T,T) \cup \cdots \cup (T,T,T,H,H)\}$$

$$= \underbrace{P_r\{(H,H,T,T,T)\}}_{p^2(1-p)^3} + \underbrace{P_r\{(H,T,H,T,T)\}}_{p^2(1-p)^3} + \cdots + \underbrace{P_r\{(T,T,T,H,H)\}}_{(1-p)^3p^2}$$

چرا؟ ناهم بودن پیش آمدها

تعداد کل این پیش آمدها = تعداد حالت‌هایی که دو محل از ۵ محل شیر باید در ترتیب سهم باشند

$$\binom{5}{2} =$$

$$\longrightarrow P_r(B) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

مطالب گفته شده در مثال قبل را تحت عنوان آزمایش های برنولی فرمول بندی می کنیم

* آزمایش برنولی Bernolli Trials

در آزمایش برنولی، آزمایش هایی در نظر گرفته می شوند که نتایج آنها دو حالت بیشتر ندارد
یعنی نتایج آزمایش تصادفی در پیش آمد A و $\bar{A}$ هستند به عنوان مثال
قطع بودن یا وصل بودن یک کلید در یک مدار الکتریکی یا منفی بودن و مثبت بودن یک عدد غیرصفر
اگر احتمال پیش آمد A برابر P باشد $P(A) = P \Longleftarrow (P(\bar{A}) = 1 - P)$

اگر این آزمایش را n بار تکرار کنیم احتمال اینکه پیشامد A ، با یک ترتیب مشخص ،

به تعداد k بار در روند تکرار آزمایش های متوالی رخ بدهد ، برابر است با

$$p^k (1-p)^{n-k} =$$ احتمال k بار رخداد پیشامد A با ترتیب مشخص

و احتمال اینکه پیشامد A ، k بار در روند تکرار آزمایش های متوالی رخ بدهد (ترتیب مهم نیست)

برابر است با

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \underbrace{P_n(k)}_{\text{k بار}}$$ احتمال k بار رخداد پیشامد A

مثال : فرض کنیم جعبه‌ای با N ترانزیستور در اختیار داریم و می‌دانیم که M تا از این ترانزیستورها خراب هستند $(M \leq N)$ از این جعبه یک ترانزیستور را به صورت تصادفی برمی‌داریم، آن را تست می‌کنیم و دوباره به جعبه برمی‌گردانیم. این آزمایش را n بار تکرار می‌کنیم. احتمال این پیشامد را پیدا کنید که k تا از این n ترانزیستور تست شده خراب باشند. (آزمایش‌ها با شرایط یکسان و به صورت مستقل است)

$$P(A) = \frac{M}{N}$$ = احتمال خراب بودن ترانزیستور انتخاب شده (در یک بار آزمایش)

$$\Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{M}{N}$$ = احتمال درست بودن ترانزیستور انتخاب شده

$$\underbrace{P_n(k)} = \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-k}$$

احتمال اینکه k ترانزیستور از n ترانزیستور تست شده خراب باشد

تمرین: اگر در مثال قبل آزمایش ها را بدون جایگزینی انجام دهیم یعنی ترانزیستور تست شده را به جعبه برنگردانیم، در این احتمال پیش آمد اینکه k تا از n ترانزیستور تست شده خراب باشد را حساب کنید.

در مورد $P_n(k)$ خوب است که به نکته زیر توجه داشته باشیم

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = [p+(1-p)]^n = 1^n = 1 =$$

حاصل جمع احتمالات تمام پیشامدهای ممکن روی Ω_n

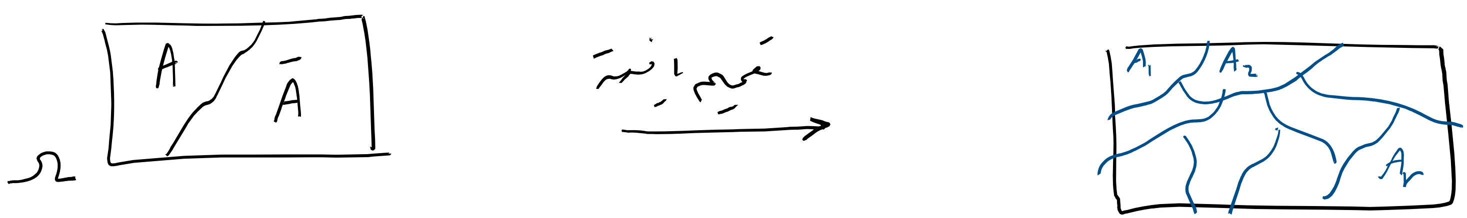
یادآوری: بسط دوجمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

آزمایش های تکراری برنولی را می توان به آزمایشهایی که نتیجه ی آنها بیشتر از دو حالت دارند نیز تعمیم داد.

آزمایش برنولی تعمیم یافته

در آزمایش برنولی ها، با تکرار آزمایش تصادفی ساده، دانستیم که نتیجه آنها شامل دو پیش آمد A و $\bar{A}$ بود. در آزمایش برنولی تعمیم یافته، با تکرار آزمایش تصادفی ساده داریم که نتیجه آنها یک افراز روی Ω تشکیل می دهند.



اگر داشته باشیم

$$P(A_i) = p_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^{r} P(A_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

یک آزمایش تصادفی داریم که را با توجه به اندازه $\underbrace{\{A_1, A_2, \dots, A_r\}}_{\text{نتایج مختلف آزمایش تصادفی}}$ را n بار تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه پیش آمد A_i به تعداد k_i بار رخ بدهد برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

۱- اگر ترتیب خاصی مورد نظر باشند

$$p_1^{k_1} \, p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$$

۲- اگر ترتیب مهم نباشد.

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r} \quad , \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} k_i = n \\ \sum_{i=1}^{r} P_i = 1 \end{cases}$$

مثال: یک جعبه با سه گوی در اختیار داریم که روی گوی ها شماره های 1 ، 0 و -1 وجود دارد. یک گوی را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم و عدد روی گوی را می نویسیم و آن را به جعبه برمی گردانیم. این آزمایش را 7 بار تکرار می کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را به دست بیاورید.

۱- پیشامد اینکه نتایج حاصل به صورت $(\overset{3/8}{-1}, \underset{1/2}{1}, \overset{1/8}{0}, \overset{1/8}{0}, \underset{1/2}{1}, \overset{3/8}{-1}, \underset{1/8}{0})$ باشد. پیشامد A

۲- پیشامد اینکه سه بار صفر، دو بار 1 و دو بار -2 ظاهر شود. پیشامد B

فرض کنیم

$$P(1) = \frac{1}{2}, \quad P(0) = \frac{1}{8}, \quad P(-1) = \frac{3}{8}$$

$$P_r\{A\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$P_r\{B\} = \underbrace{\binom{7}{2,2,3}}_{\frac{7!}{2!\,2!\,3!}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

مثال: در آزمایشگاه به مقاومت‌هایی نیاز داریم که مقدار آنها دقیقاً برابر 10Ω باشد. می‌دانیم که فقط 1% از مقاومت‌های موجود در بازار این خصوصیت را دارند. دست کم چه مقدار مقاومت باید خریداری شود که با احتمال 95% دست کم یکی از مقاومت‌ها شرط مورد نظر ما را داشته باشد.

* فرض کنیم n مقاومت خریداری شده است. مقاومت‌ها را تست کرده‌ایم و درست بودن یا درست نبودن آن را تعیین کرده‌ایم.

$$P = 1\% = \frac{1}{100}$$ احتمال درست بودن یک مقاومت

پیش آمد اینکه دست کم یکی از مقاومت ها دقیق باشد = پیش آمد C

(دست کم: حداقل)

$$P_r(C) = 0.95$$

احتمال (پیش آمد C) = احتمال (پیش آمد اینکه یک مقاومت دقیق باشد یا دو مقاومت دقیق باشند یا ....

یا n مقاومت دقیق باشد) = رابطه ای برحسب n

$$\underbrace{\text{رابطه ای برحسب } n = 0.95}_{\text{معادله}}$$

حل معادله $\longrightarrow$ $n = ?$

ما باید احتمال پیش آمد C را برحسب n حساب کنیم و حاصل را برابر 0.95 قرار دهیم و n را به دست بیاوریم. اما با نگاه کردن به پیش آمد C متوجه می شویم که این پیش آمد اجتماع چندین پیش آمد دیگر است و محاسبه ی احتمال آن می تواند پیچیده باشد. برای این که راه حل ساده تر باشد، احتمال پیش آمد مکمل C را حساب می کنیم که پیش آمد ساده تری است:

$\bar{C} =$ پیش آمد اینکه هیچ مقاومتی درست نباشد

همان طور که می بینیم پیش آمد $\bar{C}$ نسبت به C، پیش آمد ساده تری است و محاسبه ی احتمال آن برحسب n، راحت تر است.

$$P(C) = 0.95 \implies P(\bar{C}) = 1 - 0.95 = 0.05 \quad (*)$$

از طرف دیگر احتمال اینکه هیچ کدام از n مقاومت خریداری شده دقیق باشند برابر است با

$$P(\bar{C}) = \binom{n}{0} P^{0} (1-P)^{n-0} \quad , \quad P = 0.01$$

$$\implies P(\bar{C}) = \frac{n!}{0!\,n!}(0.01)^{0}(1-0.01)^{n} = 1 \times 1 \times (1-0.01)^{n} \quad (**)$$

$$(*),(**) \implies (0.99)^{n} = 0.05 \implies n \log 0.99 = \log 0.05$$

$$\implies n = \frac{\log 0.05}{\log 0.99}$$

مثال : یک نوع دیود در اختیار داریم که احتمال اینکه قبل از 1000 ساعت کار خراب بشود برابر 0.15 است . اگر به تعداد 100 عدد از این دیود خریداری کرده باشیم احتمال این را حساب کنید که تعداد 95 تا یا بیشتر از این دیود های خریداری شده قبل از 1000 ساعت کار سالم باشند .

دست کم 95 تا از این دیودها قبل از 1000 ساعت کار ، سالم باشند .

A : پیش آمد اینکه یک دیود قبل از 1000 ساعت کار خراب بشود

$P(A) = 0.15 \longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0.15 = .85$ = احتمال اینکه دیود قبل از 1000 ساعت کار سالم باشد

دست کم 95 دیود قبل از هزار ساعت کار سالم باشند ① = پیش آمد

ماکزیمم 5 دیود قبل از هزار ساعت کار خراب باشند ② =

$$= \sum_{k=95}^{100} (0.85)^{k} (0.15)^{100-k} \binom{100}{k} \quad ①$$

$$= \sum_{k'=0}^{5} (0.15)^{k'} (0.85)^{100-k} \binom{100}{k} \quad ②$$