به نام خدا

- قضیه احتمال کلی و فرمول بیز

مثال: کانال های باینری متقارن در مخابرات

یکی از کانال هایی که در مخابرات برای مدل سازی ارسال اطلاعات باینری ('1' , '0') استفاده می شود. کانال باینری متقارن است. در این کانال به علت خرابی هایی که به سیگنال ارسالی اعمال می شود، بیت های ارسال شده، دارای خطا خواهند بود. این خطا را در یک کانال باینری متقارن با P نمایش می دهیم. در واقع احتمال اینکه فرستنده بیت '0' را بفرستد ولی در گیرنده بیت '1' دریافت شود (و بالعکس) برابر P است.

احتمال اینکه فرستنده بیت '۱' را ارسال کند برابر P_1 است، در نتیجه احتمال اینکه فرستنده بیت '0' را بفرستد برابر $1-P_1$ است.

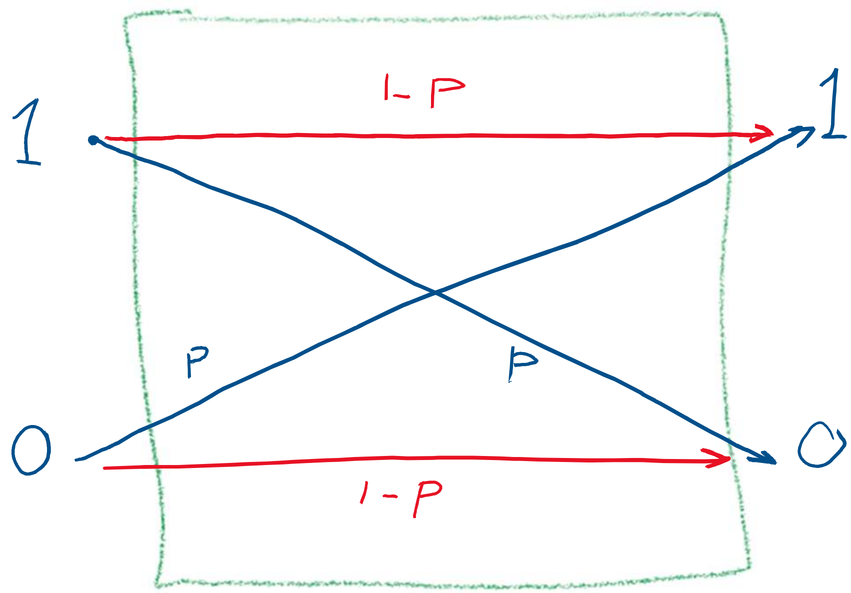
Transmitter
(TX) فرستنده

Receiver
(RX) گیرنده

احتمال ارسال بیت

P_1

$1-P_1$



$P_r\{$ دریافت 1 به شرط ارسال 1 $\} = 1-P$

$P(R_1 | T_1) = 1-P$

$P(R_0 | T_1) = P$

$P(R_1 | T_0) = P$

$P(R_0 | T_0) = 1-P$

$P_r\{$ ارسال 1 $\} = P(T_1) = P_1$

$P_r\{$ ارسال 0 $\} = P(T_0) = 1-P_1$

۱- احتمال خطای این کانال را محاسبه کنید. P_e

پیش آمد خطا (ϵ) = پیش آمد اینکه (0 ارسال شده باشد و 1 دریافت شده باشد) یا
(1 ارسال شده باشد و 0 دریافت شده باشد)

قضیه احتمال کل $\Longrightarrow$

$$P_e = P_r\{\epsilon\} = P(T_0 \cap R_1) + P(T_1 \cap R_0)$$

$$= P(T_0)\,P(R_1 \mid T_0) + P(T_1)\,P(R_0 \mid T_1)$$

$$= (1-P_1)\,P + P_1\,P = P(1-P_1+P_1) = P$$

- فرض کنیم در گیرنده بیت "0" دریافت شده باشد. احتمال این را حساب کنید که فرستنده بیت "0" را فرستاده باشد.

$$P(T_0 \mid R_0) = ?$$

$$\xRightarrow{\text{فرمول بیز}} \quad P(T_0 \mid R_0) = \frac{\overbrace{P(R_0 \mid T_0)}^{1-p}\ \overbrace{P(T_0)}^{1-p_1}}{P(R_0)} = \frac{(1-p)(1-p_1)}{P(R_0)}$$

$P(R_0)$ را با کمک قضیه احتمال کلی حساب می‌کنیم.

$$P(R_0) = P(R_0 \mid T_0)\,P(T_0) + P(R_0 \mid T_1)\,P(T_1) = (1-p)(1-p_1) + p\,p_1$$

$$\Longrightarrow P(T_0|R_0) = \frac{(1-p)(1-p_1)}{(1-p)(1-p_1)+p\,p_1}$$

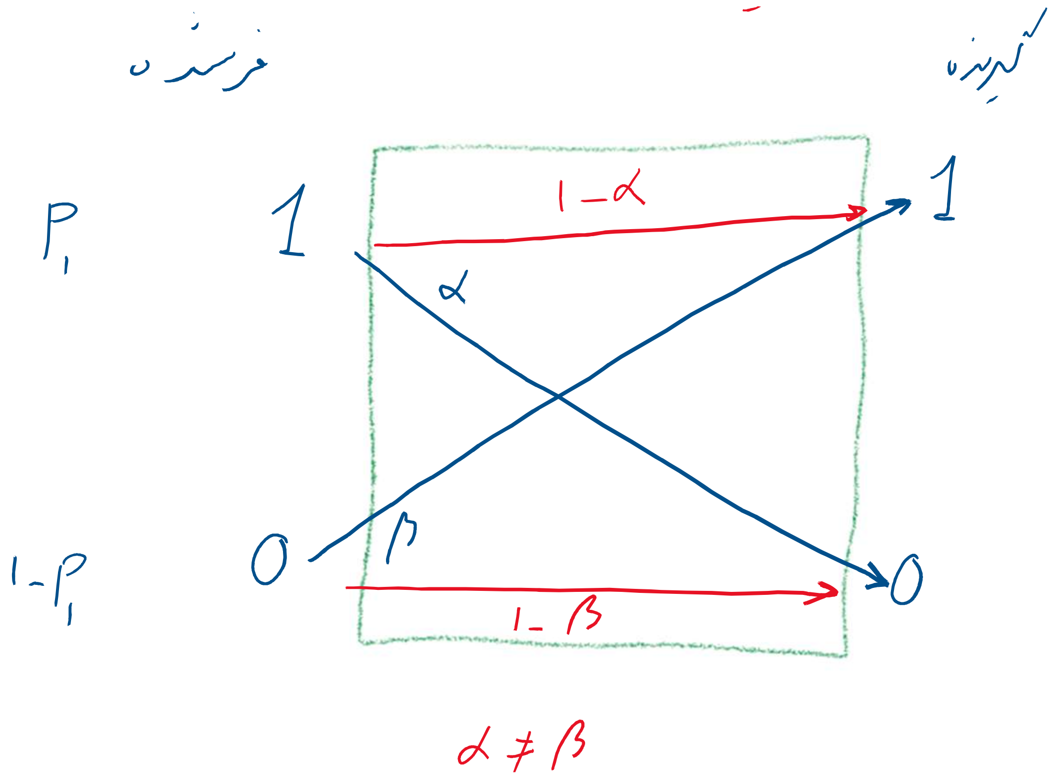
$$P(T_0|R_1)\ ,\ P(T_1|R_1)\ ,\ P(T_1|R_0)$$

به عنوان تمرین : احتمالات
را حساب کنید

$$P(T_0|R_0) + P(T_1|R_0) = 1$$

$$P(T_0|R_1) + P(T_1|R_1) = 1$$

تمرین : مثال قبل را برای یک کانال باینری نامتقارن حل کنید.

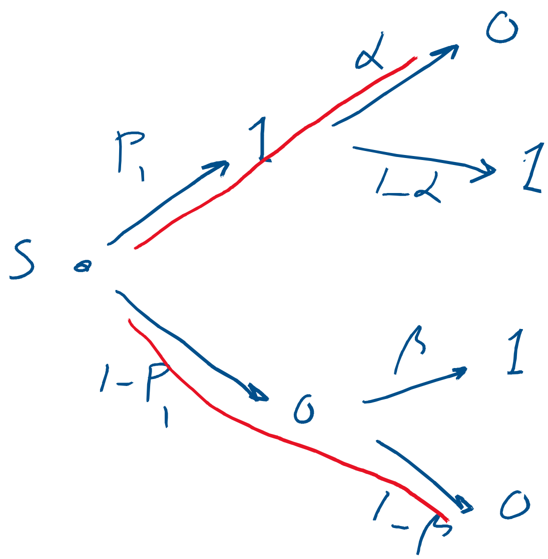


- احتمال خطای کانال را حساب کنید

- با فرض دریافت '0' در گیرنده ،
احتمال این را حساب کنید که فرستنده بیت '0' را فرستاده باشد.

به عنوان مثال عددی قرار دهید : $P_1 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha = \beta = 10^{-3}$

این گونه مسائل را می‌توان با نمودار درختی نیز حل کرد



$$P(R_0) = ?$$

$$P(R_0) = P_1\alpha + (1-P_1)(1-\beta)$$

مثال ۶ سه سکه‌ی C_1 و C_2 و C_3 را در اختیار داریم. هر دو سمت سکه C_1 خط است و هر دو سمت سکه C_2 شیر است. سکه C_3 سالم است (یک طرف خط و یک طرف شیر). یک سکه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و آن را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر شیر مشاهده کرده باشیم، احتمال این را حساب کنید که سکه سالم را انتخاب کرده باشیم

$$\underbrace{P(C_1)}_{\text{احتمال انتخاب } C_1} = \underbrace{P(C_2)}_{\text{احتمال انتخاب } C_2} = \underbrace{P(C_3)}_{\text{احتمال انتخاب } C_3} = \frac{1}{3}$$

$$P(C_3 \mid H) = ?$$

$P(H|C_1) = 0$, $P(T|C_1) = 1$

$P(H|C_2) = 1$, $P(T|C_2) = 0$

$P(H|C_3) = \frac{1}{2}$, $P(T|C_3) = \frac{1}{2}$

$P(C_3|H) = ?$

فرمول بیز

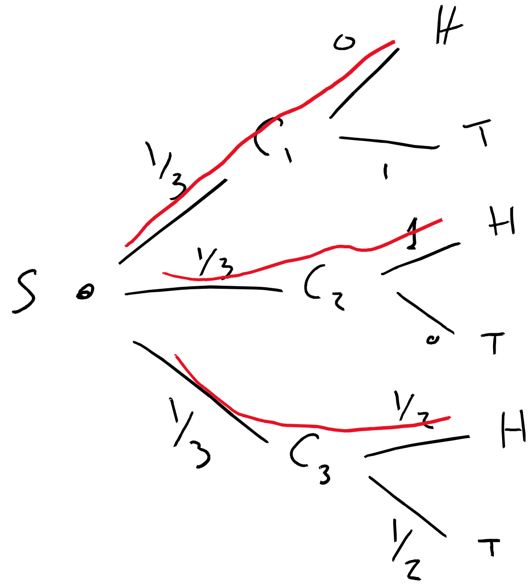
$$P(C_3|H) = \frac{P(H|C_3)\,P(C_3)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\underbrace{P(H)}_{\text{احتمال کلی}}}$$

برای محاسبه $P(H)$ از قضیه احتمال کل استفاده می‌کنیم.

$$P(H) = P(H|C_1)P(C_1) + P(H|C_2)P(C_2) + P(H|C_3)P(C_3)$$

$$= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow P(C_3|H) = \frac{P(H|C_3)P(C_3)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$



$$P(H) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

در ادامه می‌خواهیم مفهوم استقلال پیش‌آمدها را تعریف کنیم. ابتدا از مفهوم استقلال دو پیش‌آمد شروع می‌کنیم.

مفهوم استقلال دو پیشامد A و B

دو پیشامد A و B را مستقل از هم می‌گوییم هرگاه رخ دادن یکی از آنها (قطعی بودن رخداد یکی از آنها) هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد. با بیان ریاضی اگر داشته باشیم

$$P(A|B) = P(A) \quad و \quad P(B|A) = P(B)$$

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند.

$$A \perp\!\!\!\perp B$$

نماد استقلال

از طرف دیگر می‌دانیم که (رابطه‌ی زنجیره‌ای)

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B$$

$$\Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(B)\,P(A)$$

نتیجه ۱: اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند. احتمال اشتراک آنها برابر حاصلضرب احتمال تک تک آنها است.

نتیجه ۲: دو پیشامد مستقل از هم A و B با احتمالات وقوع غیر صفر، حتماً اشتراک دارند

بنابراین "جدا از هم بودن" در پیش آمدها به صورت ($A \cap B = \varphi$ یا $P(A \cap B) = 0$

را با "استقلال" در پیش آمدها اشتباه نگیریم

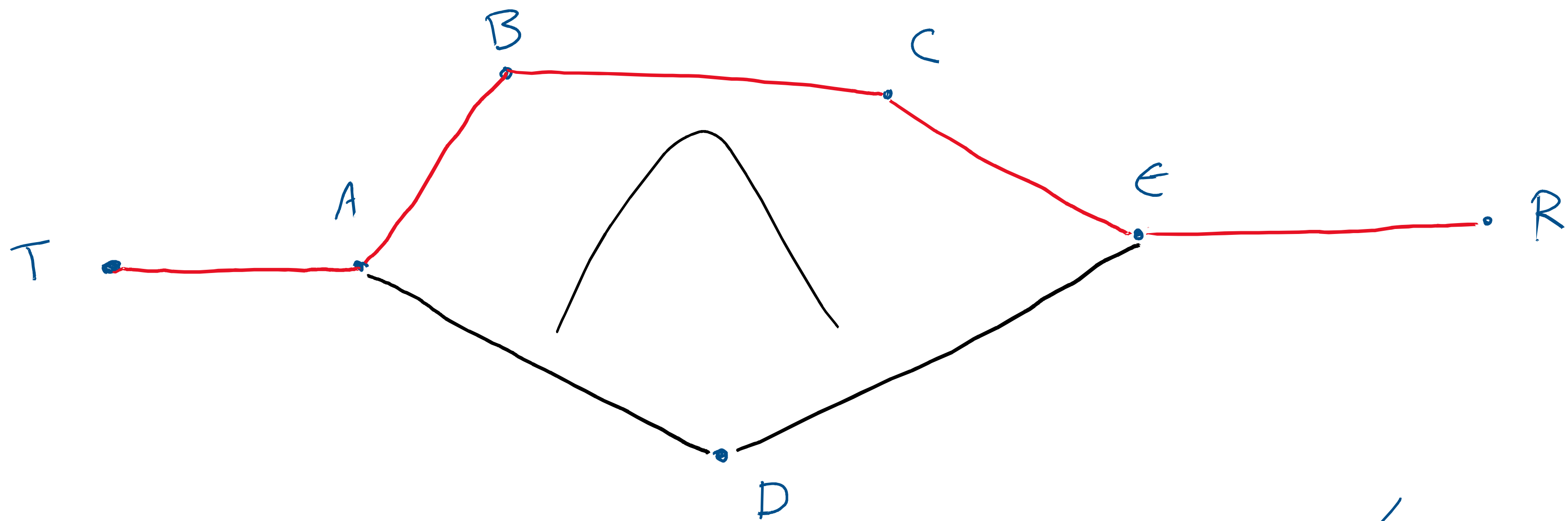
مثال: می خواهیم بین دو نقطه T و R یک لینک مخابراتی برقرار کنیم. این لینک شامل 4 ایستگاه

A, B, C, E است. از ایستگاه D به عنوان ایستگاه پشتیبان استفاده می کنیم (stand by

بین A و E استفاده می کنیم. فرض کنیم احتمال سالم بودن ایستگاهها در بازه ی زمانی T،

برای همه p باشد. احتمال اینکه لینک بین T و R در بازه ی زمانی T، برقرار باشد را حساب کنید.

فرض کنیم خرابی ایستگاههای A, B, C, D, E مستقل از هم هستند.



پیش آمد برقراری لینک = سالم بودن A و E و (سالم بودن B, C یا D)

$\cap \equiv \cdot$

احتمال برقراری لینک $P_L = P_r \{(A \cap E) \cap [(B \cap C) \cup D]\}$

$\cup \equiv +$

$$P_L = P_r\left\{(A \cap E) \cap \left[(B \cap C) \cup D\right]\right\}$$

$$= P(A)\,P(E)\,P\left[(B \cap C) \cup D\right]$$

استقلال پیشامدها

$$= P_0\,P_0\left[\overbrace{P(B \cap C)}^{P(B)P(C)} + P(D) - \overbrace{P(B \cap C \cap D)}^{P(B)P(C)P(D)}\right] = P_0^2\left(P_0^2 + P_0 - P_0^3\right)$$

$$= P_0^3\left(1 + P_0 - P_0^2\right)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

مفهوم استقلال را می‌توان به هر تعداد پیش‌آمد تعمیم داد. تعداد n پیش‌آمد $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را توأماً مستقل می‌گوییم هرگاه هر زیرمجموعه از این پیش‌آمدها به هر تعداد، مستقل از هم باشند (یعنی تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی مستقل از هم باشند، تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مستقل از هم باشند و ...)

با بیان ریاضی اگر داشته باشیم

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_r}) \quad , \quad i_r \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

$$r = 2, 3, \ldots, n$$

یا

$$P\left(\prod_{j=1}^{r} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{i_j})$$

آنگاه می‌گوییم پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n توأماً مستقل هستند

$$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \perp\!\!\!\perp A_3 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp A_n$$ (نماد استقلال توأم)

در ارتباط با استقلال پیشامدها، چند قضیه وجود دارد که استقلال پیشامدهای مختلف را به ما نشان می‌دهد. در ادامه این قضیه‌ها را بیان خواهیم کرد.

قضیه: اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، آنگاه دو پیشامد A و B^c نیز مستقل از هم هستند. (اثبات به عنوان تمرین) (راهنمایی: نشان دهید $P(B^c|A)=P(B^c)$ و $P(A|B^c)=P(A)$

یا نشان دهید $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$)

نتیجه (قضیه): اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، آنگاه دو پیشامد A^c و B^c نیز مستقل از هم هستند. (اثبات: قضیه‌ی قبل را دو بار برای A و B^c اعمال می‌کنیم)

تمرین: اگر داشته باشیم $A \perp\!\!\!\perp B$ و $A \perp\!\!\!\perp C$ ، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید (با استدلال مناسب)

1) $A \perp\!\!\!\perp (B \cap C)$

2) $A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$

3) $B \perp\!\!\!\perp C$

4) $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C$