به نام خدا

بسط چندجمله‌ای

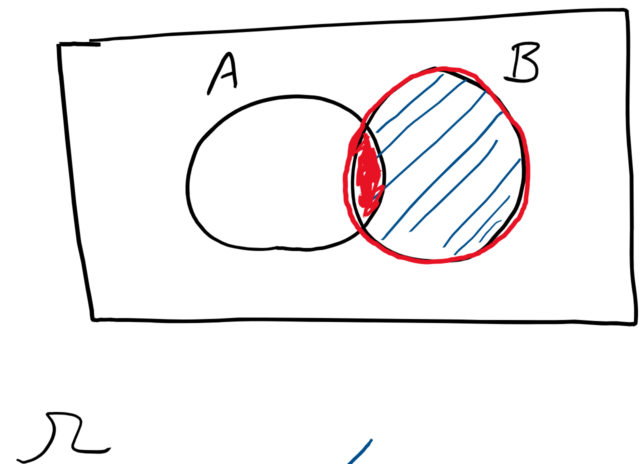
$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n = \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r} \underbrace{\binom{n}{m_1,m_2\ldots m_r}} a_1^{m_1} a_2^{m_2}\cdots a_r^{m_r}$$

* احتمال شرطی

احتمال شرطی پیش آمد A به شرط اینکه بدانیم پیش آمد B حتماً رخ داده است را با

$P(A|B)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



در واقع با توجه به اینکه می‌دانیم پیش آمد B حتماً رخ داده است. فضای احتمال را به پیش آمد B نرمالیزه می‌کنیم در واقع با کمک نرمال‌سازی یک تابع احتمال شرطی تعریف کرده‌ایم. برای اینکه نشان

دوم، رابطه‌ای که برای $P(A|B)$ به دست آوردیم یک تابع احتمال است. لازم است ثابت کنیم که سه اصل اساسی تابع احتمال برای $P(A|B)$ نیز برقرار است.

1) $\forall A \subset \Omega \,, \quad P(A|B) \geq 0$

اثبات:

$$P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A\cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{> 0}} \geq 0$$

2) $P(\Omega \mid B) = 1$

اثبات:

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\overbrace{\Omega \cap B}^{B})}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $\underline{A \cap C = \varphi} \implies P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$

اثبات:

$$P(A \cup C \mid B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overbrace{(A \cap B)} \cup \overbrace{(C \cap B)})}{P(B)} \underset{(A \cap B) \cap (C \cap B) = \varphi}{=} \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A\cup C|B) = \underbrace{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}_{P(A|B)} + \underbrace{\frac{P(C\cap B)}{P(B)}}_{P(C|B)} = P(A|B)+P(C|B)$$

به این ترتیب نشان دادیم که سه اصل اساسی تابع احتمال برای $P(A|B)$ نیز برقرار است.

بنابراین $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ نیز خصوصیات تابع احتمال را دارد و می‌توان آن را تابع احتمال شرطی نامید. به این ترتیب تمامی قضایا و خصوصیاتی که در مورد تابع احتمال بیان کردیم در مورد تابع احتمال شرطی نیز برقرار است (باید توجه داشته باشیم که همواره شرط را در نظر بگیریم)

به عنوان مثال : برای آنها احتمال شرطی داریم

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

در ادامه می‌خواهیم رابطه‌ای را که به صورت نتیجه‌ای از تابع احتمال شرطی است و کاربردهای زیادی دارد به دست بیاوریم. می‌دانیم

$$1)\quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ①$$

$$2)\quad P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \quad ②$$

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$①,② \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

رابطه زنجیره‌ای

قانون زنجیره‌ای قابل تعمیم به هر تعداد پیش آمد دلخواه نیز هست.

یا $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$

$$\underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}^{P(A_1 A_2 \cdots A_n)} = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_2, A_1) \cdots P(A_n | A_{n-1}, \ldots, A_1)$$

مثال: یک تاس سالم را یک بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این پیش آمد را حساب کنید که عدد حاصل کوچکتر از 4 باشد به شرط اینکه بدانیم نتیجه آزمایش یک عدد زوج بوده است.

A : پیش آمد اینکه عدد دیده شده کوچکتر از 4 باشد

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$A = \{1, 2, 3\}$

B : پیش آمد اینکه عدد دیده شده زوج باشد

$B = \{2, 4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{1}{3}$$

مثال: فرض می‌کنیم یک دیود داریم که احتمال خرابی آن بعد از زمان t برابر $e^{-\alpha t^2}$ است.

اگر بدانیم که این دیود تا زمان T سالم بوده است، احتمال این پیش‌آمد را حساب کنید که خرابی دیود بین زمان‌های t_1 و t_2 اتفاق بیفتد. با شرط $t_1, t_2 > T$ ، $t_1 < t_2$

B: پیش‌آمد اینکه دیود تا زمان T سالم بوده است

معادل پیش‌آمد اینکه خرابی دیود بعد از T رخ بدهد

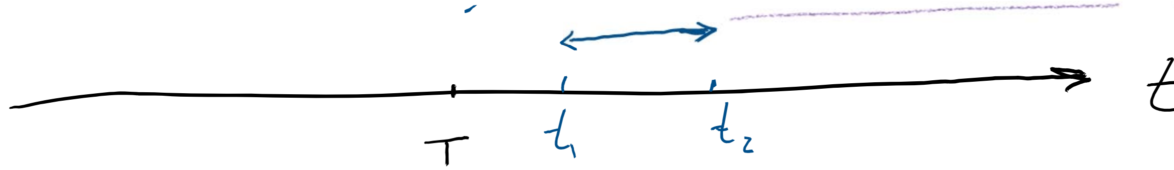
A: پیش‌آمد اینکه خرابی دیود در بازه t_1 تا t_2 رخ بدهد.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$e^{-\alpha t_1^2}$

$e^{-\alpha t_2^2}$

A: خرابی بین لحظات t_1, t_2



B: خرابی بعد از T $\rightarrow P(B) = e^{-\alpha T^2}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{e^{-\alpha T^2}}$$

$$P(A|B) = \frac{e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}}{e^{-\alpha T^2}}$$

مثال: مسابقه‌ای ترتیب داده شده است که خانواده‌هایی می‌توانند در آن شرکت کنند که دست‌کم یک فرزند پسر داشته باشند. اگر خانواده X در مسابقه شرکت کرده باشند و بدانیم که دو فرزند دارند. احتمال این را حساب کنید که هر دو فرزند خانواده X پسر باشند.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

B: پیشامد اینکه خانواده X دو فرزند داشته باشند که دست‌کم یکی از آنها پسر است.

$\{(b,g), (g,b), (b,b)\}$

A: پیشامد اینکه هر دو فرزند خانواده X پسر باشند.

$A = \{(b,b)\}$

$\Omega = \{(b,g), (g,b), (b,b), (g,g)\}$

$$P(A\cap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{1}{3}$$

مثال: (استفاده از قانون زنجیره‌ای در حل مسائل)

فرض کنیم در جعبه‌ای 4 توپ قرمز و 6 توپ آبی داریم. دو توپ را به صورت تصادفی و بدون جایگزینی انتخاب می‌کنیم. احتمال این را حساب کنید که هر دو توپ قرمز باشد.

راه حل اول: با آنالیز ترکیبی

$$P = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4\times 3}{2}\times 1}{\frac{9\times 10}{2}} = \frac{4\times 3}{10\times 9} = \frac{2}{15}$$

راه حل دوم : قانون زنجیره‌ای

R_1 : پیش آمد اینکه توپ اول قرمز باشد

R_2 : پیش آمد اینکه توپ دوم قرمز باشد

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\,P(R_2 | R_1)$$

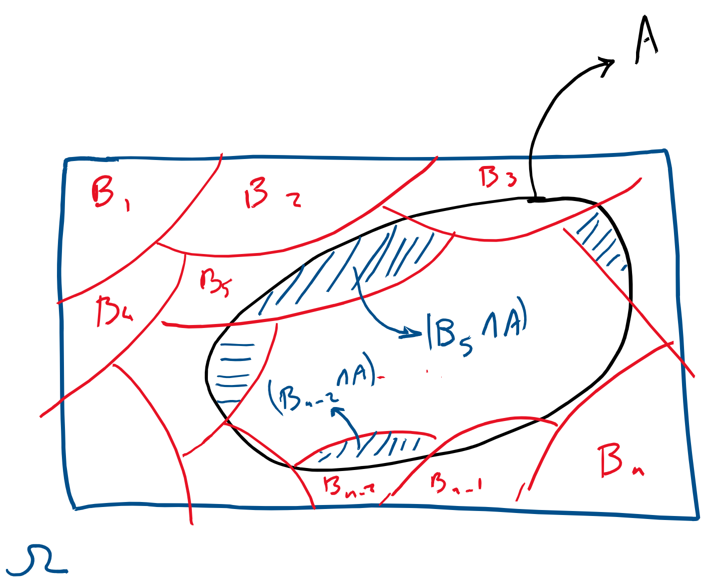
$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

علاوه بر رابطه ی زنجیره ای ، چند رابطه پرکاربرد دیگر نیز وجود دارند که در حل مسائل بسیار کمک کننده هستند

در ادامه می خواهیم به برخی از این روابط اشاره کنیم.

قضیه احتمال کلی و فرمول بیز Bayes

الف) قضیه احتمال کلی



$$P(A) = ?$$

هدف محاسبه احتمال پیش آمد A است.

اگر مجموعه پیش آمدهای B_1 ، B_2 ، ... ، B_n یک افراز روی نمونه باشند می توان احتمال هر پیش آمد دلخواه A روی فضای نمونه را با رابطه زیر به دست آورد

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \underline{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i)} = P(A)$$

اثبات :

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_i}_{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} \Big) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (A \cap B_i)}_{\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)}$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\forall i \neq j \;;\quad (A\cap B_i)\cap(A\cap B_j)=\phi$$

جدا از هم هستند

$B_i \cap B_j = \phi$

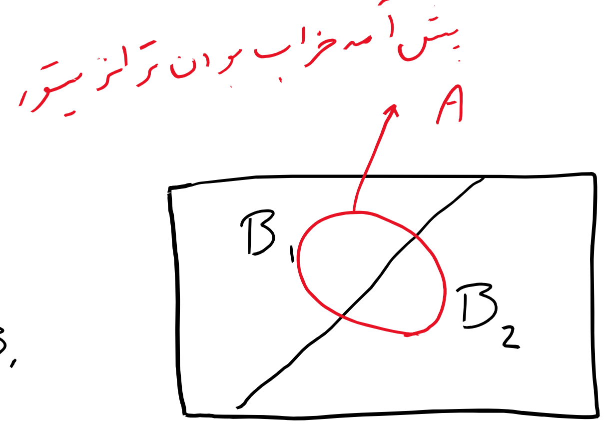
$$\Longrightarrow \quad P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A|B_i)$$

رابطه زنجیره‌ای

$$\Longrightarrow \quad P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A|B_i)$$

مثال : دو جعبه حاوی ترانزیستور داریم. در یکی از جعبه‌ها 2 ترانزیستور خراب و 8 ترانزیستور سالم وجود دارد. در جعبه دیگر 9 ترانزیستور خراب و 6 ترانزیستور سالم وجود دارد. یک جعبه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک ترانزیستور به صورت تصادفی از آن جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال این را حساب کنید که ترانزیستور خراب باشد.

حل : با کمک قضیه احتمال کل



$$P(A) = P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)$$

B_1 : پیش آمد انتخاب جعبه اول

B_2 : پیش آمد انتخاب جعبه دوم

A : پیش آمد خراب بودن ترانزیستور

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \, \frac{9}{15}$$

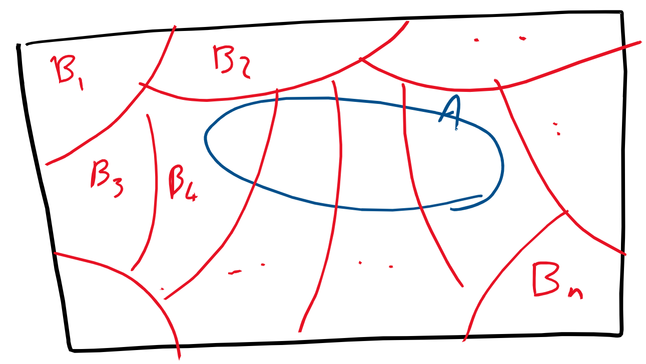
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}} + \frac{1}{2} \, \frac{\binom{9}{1}}{\binom{15}{1}}$$

- اگر ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد، احتمال این را حساب کنید که از جعبه‌ی دوم انتخاب شده باشد.

$$P(B_2 \mid A) = ?$$

برای محاسبه ی چنین احتمالاتی (احتمالات پس از مشاهده یا احتمالات پسین) از فرمول بیز استفاده می کنیم.

$$P(B_j \mid A) = ?$$



$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_j)\,P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)\,P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\,P(B_i)}$$

(فرمول بیز)

قانون زنجیره ای   قضیه احتمال کل

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

احتمالات پسین پس از مشاهده

Aposteriori Probability

احتمالات پیشین پیش از مشاهده

Apriori Probability

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)\,P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{15} \times \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{9}{15} + \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{10}}$$

$$P(B_2|A) = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad P(B_1|A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$