به نام خدا

* تعریف کلاسیک

N_A : تعداد حالت های ممکن

N : کل تعداد حالت ها

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

* برای محاسبه N_A و N از آنالیز ترکیبی کمک می گیریم.

یادآوری: آنالیز ترکیبی

جایگشت Permutation

نحوه‌ی چینش N شئ در m محل به طوری که ترتیب مهم باشد
(یا انتخاب m شئ از N شئ به طوری که ترتیب مهم باشد)

$$P_m^N = \frac{N!}{(N-m)!}$$

* اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالت‌های ممکن برابر N^m

$$\underset{N}{\underline{\quad}} \quad \underset{N}{\underline{\quad}} \quad \cdots \quad \underset{N}{\underline{\quad}}$$

در مورد حالت کلی، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است،

$$P^N_m = (N-m+1)\, P^N_{m-1}$$

* نحوه‌ی چینش N شی در N محل به طوری که ترتیب آنها مهم باشد،

$$P^N_N = \frac{N!}{0!} \underset{0! \triangleq 1}{=} N!$$

- ترکیب Combination

نحوه‌ی انتخاب m شی از N شی، به طوری که ترتیب مهم نباشد، ترکیب نامیده می‌شود و با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$C_m^N = \frac{N!}{(N-m)!\, m!} = \binom{N}{m}$$

* به طور مثال تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از یک مجموعه‌ی ده عضوی برابر C_3^{10} است. زیرا در مجموعه‌ها، ترتیب اعضا مهم نیست.

$$C_3^{10} = \frac{10!}{7!\, 3!}$$

مثال: فرض کنیم یک خوراکی ۶ تا ترب سفید و ۴ ترب قرمز را در ده جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک ترب قرار داشته باشد. تعداد حالت‌های ممکن چیست؟

— — — . . . —

$$N = \binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

حل این مسأله، معادل انتخاب ۴ جعبه از ۱۰ جعبه، برای ترب‌های قرمز است یا انتخاب ۶ جعبه از ۱۰ جعبه برای ترب‌های سفید

* به طور کلی نحوه‌ی قرار دادن m شیء مشابه در N جعبه اگر در هر جعبه فقط یک ترتیب
تعداد
قرار بگیرد، برابر است با: $(m \leq N)$

$$C^N_m = \binom{N}{m}$$

* اگر m شیء ذکر شده در مثال بالا متمایز باشند، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$P^N_m = \frac{N!}{(N-m)!} = m!\,C^N_m = m!\binom{N}{m}$$

* اگر بخواهیم m شیء را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه، هر تعداد دلخواهی از اشیاء را بتوان قرار داد، تعداد حالت ها چقدر خواهد بود؟

برای اینکه این m شیء را به N دسته تقسیم بندی کنیم، نیاز به $N-1$ مرز میانی بین اشیاء داریم. بنابراین در کل $N-1+m$ شیء خواهیم داشت

$$\binom{N-1+m}{N-1}$$

* مسئله ای: $x_1 + x_2 + \dots + x_N = m$ را در نظر بگیریم. فرض می کنیم که x_i ها اعداد صحیح غیر منفی باشند. تعداد جواب های معادله ی بالا چند تا است؟

$$\binom{N-1+m}{N-1}$$

فرض کنیم که N جعبه داریم و m عدد 1 داریم و می خواهیم در هر جعبه x_i به تعداد دلخواه عدد 1 قرار دهیم.

مثال عددی

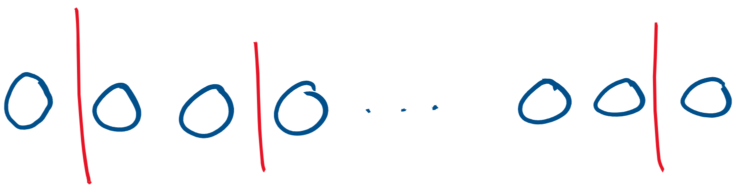
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 6$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0 = x_4 = x_5$

$x_6 = 2,\ x_7 = x_8 = x_9 = 0,\ x_{10} = 1$

$$\binom{10-1+6}{10-1} = \binom{15}{9}$$

* اگر بخواهیم m شیء را در n جعبه قرار دهیم، به طوری که در هر جعبه حداقل یک شیء وجود داشته باشد. بنابراین باید شرط $m \geqslant n$ حتماً برقرار باشد.



تعداد مرزها: $n-1$

در این مسئله، مرزها حتماً باید در مکان های بین اشیاء قرار بگیرند. تعداد این مکان ها، برابر $m-1$ است. بنابراین جواب، معادل انتخاب $n-1$ محل از $m-1$ محل است.

$$\binom{n-1}{m-1}$$

* معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ را با شرط $m \geq n$ درنظر بگیریم.

اگر جواب معادله اعداد صحیح مثبت باشند، تعداد جواب های معادله چقدر است؟

مثال عددی: $x_1+x_2+\cdots+x_5=7$

$$\binom{m-1}{n-1}=\binom{7-1}{5-1}=\binom{6}{4}$$

$$1 \mid 1 \quad 1 \mid 1 \mid 1 \quad 1 \mid 1$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

* یکی از کاربردهای ترکیب در بسط دوجمله‌ای ما، دیده می‌شود،

$$(x+y)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i y^{N-i} \qquad (*)$$

با کمک بسط دوجمله‌ای می‌توان نشان داد که،

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

اثبات: در رابطه‌ی $(*)$ قرار دهید $x = y = 1$

مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی چقدر است؟

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{تعداد زیر مجموعه های صفر عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{تعداد زیر مجموعه های یک عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیر مجموعه های } n \text{ عضوی}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

مثال: تعداد کل بردارهای باینری به طول n چقدر است؟

* بردار باینری = برداری است که المان های آن فقط صفر و یک باشند

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{یک بردار باینری به طول } 4$$

$$\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\binom{N}{2}+\cdots+\binom{N}{N} = 2^N = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}$$

تعداد بردارهای به طول N
که هیچ عنصر آن 1 نیست

یک عنصر برابر
1 است

2 عنصر
برابر یک

N عنصر برابر یک

$\binom{N}{m}$: برابر تعداد بردارهای باینری به طول N است که m عنصر آن برابر 1 و
N-m عنصر آن برابر 0 باشند.

$$\left(\square \; \square \; \cdots \; \square\right)$$

$$\binom{N}{N-m} = \binom{N}{m}$$

1 تا m

0 تا $N-m$

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}$$

در حالت آنالیز ترکیبی، ترکیب تعمیم‌یافته نیز قابل طرح است.

فرض کنیم N شیء داریم که m_1 تا از آنها شبیه هم، m_2 تا از آنها شبیه یکدیگر و ...

m_r تا از آنها شبیه یکدیگر هستند، به طوری که $m_1 + m_2 + \dots + m_r = N$

به عنوان مثال، 20 توپ داریم که 3 تای آنها سفید، 7 تای آنها قرمز و 10 تای آنها آبی است.

با بیان ریاضی می‌توان گفت که r دسته به تعداد m_r داریم به طوری که

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = N$$

تعدادکره‌ی چینش این N شیء به صورت ترکیب تعمیم یافته، قابل بیان است.

$$\binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r} = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \dots m_r!}$$

به طور معادل، این مسئله معادل این است که N شیء را به r دسته تقسیم بندی (دسته بندی) کنیم، به طوری که در دسته ی i ام، m_i شیء وجود داشته باشد.

با این مفهوم در بسط چندجمله‌ای ها نیز آشنا هستیم.

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^N = \sum_{\substack{m_1,m_2,\dots,m_r=0\\ \sum_{i=1}^{r} m_i = N}}^{N} \binom{N}{m_1,m_2,\dots,m_r} x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_r^{m_r}$$

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2+\binom{2}{2,0,0}y^2+\binom{2}{2,0,0}z^2+\binom{2}{1,1,0}xy+\binom{2}{1,1,0}xz+\binom{2}{1,1,0}zy$$

به عنوان تمرین جواب بسط $(x+y+z)^3$ را پیدا کنید.

چند مثال از محاسبه‌ی احتمال $P_A = \frac{N_A}{N}$

مثال ۱: فرض کنیم که یک سکه را ۵ بار پرتاب کنیم. احتمال حداکثر 3 بار شیر آمدن را حساب کنید.

N : کل تعداد حالت‌های ممکن

یک بار پرتاب سکه $\{H, T\}$

پنج بار پرتاب

___ ___ ___ ___ ___

دو حالت H, T — حالت — حالت

بنابراین کل حالت های ممکن $= N = 2^5$

باید تعداد حالت هایی را حساب کنیم که حداکثر 3 مکان از 5 مکان بالا، H اتفاقا باشد

$$\underbrace{\binom{5}{0}}_{\text{تعداد حالت های که اصلا H نباشد}} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{تعداد حالت های که یک H باشد}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{تعداد حالت های که در 2 H باشد}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{تعداد حالت های که 3 H باشد}} = N_A$$

$$\Longrightarrow P_A = \frac{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{2^5}$$

مثال ۲ - می‌خواهیم m توپ را به طور تصادفی در n جعبه قرار دهیم. شرط $n \geq m$ برقرار است. احتمال این را حساب کنید که m توپ در m جعبه‌ای که مورد نظر ماست قرار بگیرد. (یعنی ما از قبل m جعبه را در ذهن خود انتخاب کرده‌ایم) (هر توپ در یک جعبه قرار بگیرد)

$$\frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{\frac{n!}{(n-m)!\,m!}} = \frac{(n-m)!\,m!}{n!}$$

$1 =$ تعداد حالت‌های مورد نظر

$\binom{n}{m} =$ تعداد حالت‌های ممکن

* اگر ترتیب ها مهم نباشند.

* تعداد حالت های ممکن: $\frac{n!}{(n-m)!} = P_m^n = N$

* تعداد حالت های مورد نظر: $m! = N_A$

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{m!}{P_m^n} = \frac{m!}{\left(\frac{n!}{(n-m)!}\right)} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!} =$$

* اگر ظرفیت جعبه‌ها، مهم نباشد یعنی در جعبه های مورد نظر هر تعداد ترتیب قرار بگیرد، قابل قبول است

تعداد حالت های ممکن: n^m ، تعداد حالت های مورد نظر: $m!$ $\qquad P_A = \frac{m!}{n^m}$

1   2   ...   n   جعبه

—   —   . . .   —

m تاس

مثال: جعبه‌ای داریم که درون آن 60 توپ آبی و 40 توپ قرمز قرار دارد،
20 توپ را به طور تصادفی از این جعبه خارج می‌کنیم (بدون جایگذاری) احتمال اینکه
از این 20 توپ، 10 تا آبی و 10 تا قرمز باشند را حساب کنید.

$$\frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{\binom{100}{20}}$$

تعداد حالت های مورد نظر ← $\binom{40}{10}\binom{60}{10}$

کل حالت های ممکن ← $\binom{100}{20}$

* اگر ترتیب ها شبیه هم نباشند، جواب مسئله چه تغییری می کند؟

تعداد حالت های مورد نظر : $\binom{40}{10}\binom{60}{10}20!$

تعداد حالت های ممکن : P^{100}_{20}