به نام خدا

قضیه ی ۳ - برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم $P(A) \leq 1$

اثبات : از قضیه ی قبل می دانیم که

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$\xrightarrow[P(\bar{A}) \geq 0]{\text{اصل ۱}} \quad P(A) \leq 1$$

نتیجه : برای هر پیشامد A داریم

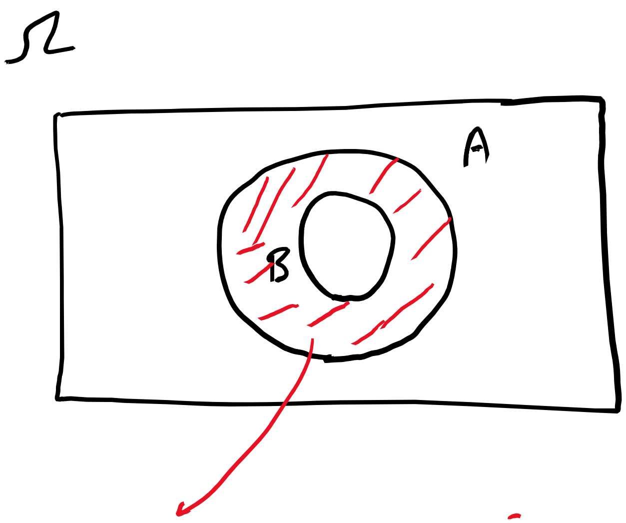
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

قضیه ی ۴ : اگر داشته باشیم $B \subset A$ آنگاه خواهیم داشت

$$P(B) \leq P(A)$$

اثبات :

از نظریه ی مجموعه ها داریم :



$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$A = B \cup (A - B)$$

$$A = B \cup (A \cap \bar{B})$$ (در پیش آمد نشان داده شد)

$$\xrightarrow{\text{از اصل 3}} P(A) = P(B) + \underbrace{P(A \cap \bar{B})} \quad (1)$$

$$P(A\cap\bar{B})\geq 0 \xrightarrow{\text{اصل ۱}} P(A)\geq P(B)$$

قضیه ی ۵ (شبیه قضیه ی 4) اگر داشته باشیم $B\subset A$

آنگاه:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

از رابطه ی ① می بینیم

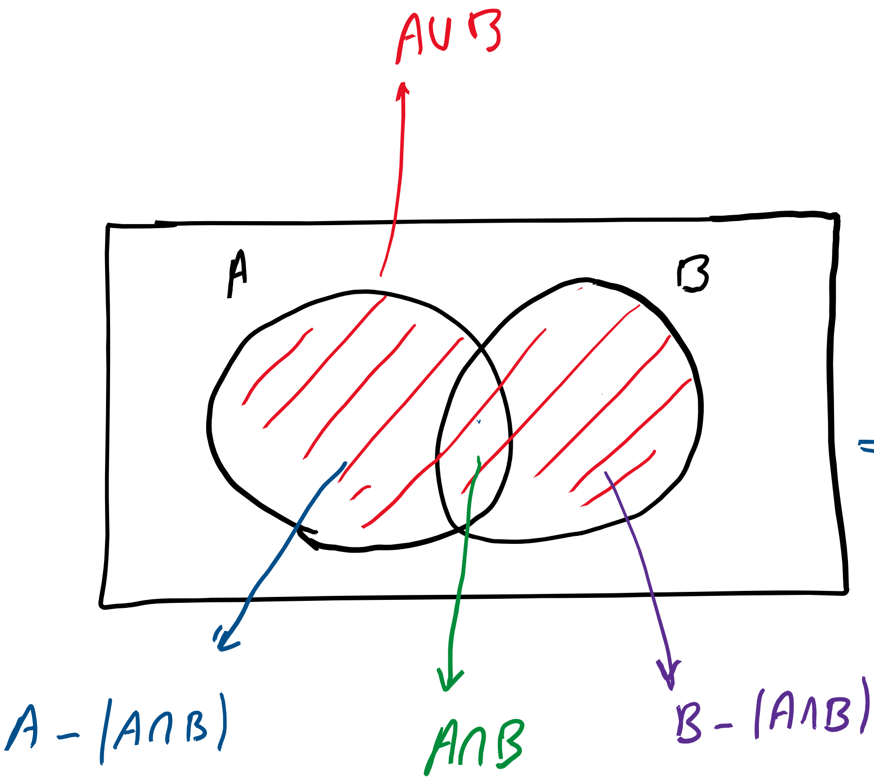
$$P(\overbrace{A\cap\bar{B}}^{A-B})=P(A)-P(B)$$

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$$

قضیه ۶ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اثبات :



$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

$$\Rightarrow A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\xrightarrow[\text{ناسازگار}]{\text{اجتماع دو پیشامد}} P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \quad (I)$$

از طرف دیگر داریم،

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\Longrightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \qquad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Longrightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \quad \checkmark$$

همان طور که گفتیم با کمک قضیه های گفته شده، می توان احتمال پیش آمدهای
مختلف را روی فضای نمونه به دست آورد. به این ترتیب لازم نیست که برای
تمام پیش آمدهای فضای نمونه، احتمال را محاسبه کنیم زیرا احتمال برخی پیش آمدها
را می توان برحسب احتمال پیش آمدهای دیگر نوشت (با کمک قضیه های
گفته شده)

در قدم بعد، می خواهیم برای پیش آمدهای یک فضای نمونه، نحوه ی تعیین احتمال
را بررسی کنیم.

برای شروع کار و ساده‌تر شدن مطالب، فرض کنیم که فضای نمونه یک مجموعه‌ی محدود و شمارش‌پذیر باشد. فرض کنیم Ω شامل نتایج

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

است.

در این فضای نمونه پیشامدهای به فرم

$$A_i = \{\xi_i\}$$

این پیشامدهای ساده می‌گوییم (فقط یک عضو دارند)

اصل سوم

$$\Longrightarrow P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

از طرف دیگر

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad , \quad P(\Omega) = 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \qquad (*)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \quad (**)$$

$\Leftarrow$ همواره می‌توان احتمال هر پیش‌آمدی روی فضای نمونه را به صورت احتمال، اجتماع چندین پیش‌آمد تکی، به دست آورد.

* آنچه گفتیم برای فضای نمونه‌ی شمارش‌پذیر نامحدود نیز برقرار است.

* اگر فضای نمونه شمارش ناپذیر باشد.

به عنوان مثال، آزمایش تصادفی، اندازه‌گیری ولتاژ در یک مقاومت باشد،

نتایج آزمایش های تصادفی از یک مجموعه شمارش ناپذیر مانند $\Omega = [\alpha_1, \alpha_2]$

خواهد بود. در این حالت احتمال یک نقطه برابر صفر است، یعنی

$$P_r\{V = \beta\} = 0$$

(ولی این پیش آمد غیرممکن نیست)

$$\beta \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

در این حالت یک تابع چگالی احتمال تعریف می‌شود که با کمک آن می‌توان احتمال اینکه ولتاژ اندازه‌گیری شده در یک بازه‌ی $[B_1, B_2] \subset \Omega$ باشد را محاسبه کرد.

$$P_r\left\{ V \in [B_1, B_2] \right\} = \int_{B_1}^{B_2} \underbrace{f(x)}_{\text{تابع چگالی احتمال}} dx$$

در این مورد در فصل‌های آینده به تفصیل صحبت خواهیم کرد. در این کلاس بیشتر آزمایش‌هایی را در نظر می‌گیریم که برای فضاهای نمونه‌ی شمارش‌پذیر تعریف می‌شوند.

تعریف احتمال

برای تعریف احتمال، نیاز به یک رابطه‌ی ریاضیاتی قابل استفاده داریم. از این تعریف کلاسیک
که برای احتمال مطرح شده است، براساس آزمایش متقارن به تعداد زیاد بررسی
نتایج عددی آنها و به صورت تجربی ارائه شده است. این آزمایش‌ها به آزمایش‌های
Pearson معروف هستند.

به طور مثال، آزمایش پرتاب سکه را به تعداد 100000 بار تکرار می‌کنیم و می‌بینیم که
به تعداد 50124 بار شیر آمده است.

* آزمایش پرتاب سکه $\{H , T\}$

در این صورت $P\{H\} = \dfrac{50124}{100000}$

یعنی احتمال یک پیشامد را به صورت فراوانی نسبی رخداد آن پیشامد در نظر می‌گیرند.

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

که در آن

n_A : تعداد رخداد پیشامد A

n : کل تعداد آزمایش های تصادفی

همان طور که می بینیم ، عدد به دست آمده ، با انتظار ریاضیاتی ما فاصله دارد. به شکل ریاضیاتی ما انتظار داریم که $P\{H\} = \frac{1}{2}$ باشد.

برای اینکه این تعریف تجربی به مقدار ریاضی نزدیک‌تر باشد، تعریف تجربی احتمال را به صورت زیر اصلاح می کنند.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

(تعریف تجربی یا عددی احتمال)

برای اینکه یک تعریف کلاسیک ریاضی از احتمال داشته باشیم، نیاز است که تعریف دقیق و غیرواسته به آزمایش‌ها باشد.

برای بیان تعریف کلاسیک احتمال، از یک مثال کمک می‌گیریم.

در پرتاب تاس فضای نمونه به صورت زیر است

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow Pr\underbrace{\{1\}}_{A} = ?$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

با به طور معادل

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالات مختلف پیش آمد

N : کل تعداد حالات آزمایش تصادفی

(این تعریف در حالتی که پیش آمدهای ساده هم احتمال باشند، برقرار است.

اگر پیش آمدها هم احتمال نباشند، احتمال پیش آمدهای ساده را برای شما مشخص می کنند)

مثال: یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه حاصل جمع دو عدد حاصل برابر ۵ باشد را حساب کنید.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \longrightarrow N = 36$$

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \longrightarrow N_A = 4$$

$$\Longrightarrow \quad P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\underbrace{P_r\{(1,3)\}}_{\text{پیشامد ساده}} = \frac{1}{36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 36 \times \frac{1}{36} = 1$$

تمام پیشامدهای ساده این آزمایش باشند

به طور کلی در یک فضای احتمال با N عنصر (در حالتی که هم احتمال باشند) داریم

پیشامدهای ساده

$$p(A_i) = \frac{1}{N} \quad , \quad N_{A_i} = 1$$

برای محاسبه ی N و N_A در این درس از آنالیز ترکیبی کمک می گیریم.

* یادآوری آنالیز ترکیبی

یکی از مفاهیم مورد استفاده در آنالیز ترکیبی مفهوم جایگشت است.

* جایگشت (Permutation)

1	2	3		m
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdots$	$\uparrow$
N	$N-1$	$N-2$		$N-m+1$

$m \leq N$

اگر بخواهیم N شی را در m مکان قرار دهیم به طوری که ترتیب قرارگیری اشیا اهمیت داشته باشد، این نحوه چینش را جایگشت می گوییم

$$P^N_m = N\times(N-1)\times(N-2)\dots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

* در این حالت، اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالت های ممکن، برابر N^m است.

$$\underset{N}{\underline{\ \ 1\ \ }}\quad \underset{N}{\underline{\ \ 2\ \ }}\quad \dots \quad \underset{N}{\underline{\ \ m\ \ }} \longrightarrow \overbrace{N\times N\times\dots\times N}^{m \text{ بار}} = N^m$$

مثال: با اعداد 9 , 8 , 7 , 6 , 4 چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت:

۱- اگر تکرار مجاز نباشد

$$P^5_3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}$$

۲- اگر تکرار مجاز باشد

$$5^3$$