به نام خدا

۹۹/۱۱/۵ کلاس حل تمرین درس فرآیند اتفاقی: دوشنبه

- دو متغیر تصادفی به صورت توأم (X, Y)

- تابع توزیع احتمال توأم $F_{XY}(x,y)$ Joint PDF

- تابع چگالی احتمال توأم $f_{XY}(x,y)$ Joint pdf

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y), \quad F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$P_r\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

۲. مفهوم استقلال در متغیر تصادفی

۱. مفهوم استقلال در پیشامد A و B از قبل آشنایی داریم در این قسمت می‌خواهیم مفهوم استقلال را برای دو متغیر تصادفی X و Y مطرح کنیم

$$\boxed{P(A|B)=P(A)\ ,\ P(B|A)=P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم می‌گوییم اگر هر پیشامد در ارتباط با X مستقل از هر پیشامد در ارتباط با Y باشد.

در این صورت هیچ چیز از X بر روی احتمال پیشامدهای مربوط به Y تأثیر نخواهد گذاشت و بالعکس. مفهوم دقیق از استقلال معرفی شده است

با بیان ریاضی می‌توان گفت

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}, \quad \underbrace{\{X \in A\}}_{\text{پیش‌آمد دلخواه مرتبط با } X} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\{Y \in B\}}_{\text{پیش‌آمد دلخواه مرتبط با } Y} \implies X \perp\!\!\!\perp Y$$

با وجود اینکه تعریف بالا یک تعریف دقیق از استقلال است، چک کردن آن برای تمام پیش‌آمدهای A و B می‌تواند وقت‌گیر و پیچیده باشد. در این راستا قضیه زیر به ما کمک می‌کند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه هر پیش‌آمد در ارتباط با X مستقل از هر پیش‌آمد در ارتباط با Y باشد این است که پیش‌آمدهای به فرم $\{X \leq x\}$ و $\{Y \leq y\}$ مستقل از هم باشند.

با بیان ریاضی می‌توان گفت

$$\forall x,y;\quad \{X\le x\}\perp\!\!\!\perp\{Y\le y\} \iff \forall A,B\subseteq\mathbb{R},\ \{X\in A\}\perp\!\!\!\perp\{Y\in B\} \iff X\perp\!\!\!\perp Y$$

$$\Rightarrow \forall x,y;\quad \{X\le x\}\perp\!\!\!\perp\{Y\le y\} \iff X\perp\!\!\!\perp Y$$

$$\Rightarrow \forall x,y;\quad \underbrace{P_r\{X\le x \overset{\cap}{,}\ Y\le y\}}_{F_{XY}(x,y)} = \underbrace{P_r\{X\le x\}}_{F_X(x)}\,\underbrace{P_r\{Y\le y\}}_{F_Y(y)} \iff X\perp\!\!\!\perp Y$$

$$\Rightarrow \forall x,y;\quad F_{XY}(x,y)=F_X(x)\,F_Y(y) \iff X\perp\!\!\!\perp Y$$

با مشتق‌گیری از رابطه قبل (مشتق مرتبه دوم نسبت به x و y) می‌توانیم به رابطه زیر برسیم

$$\forall x, y \; ; \quad \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)}_{f_{XY}(x,y)} = \overbrace{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x) F_Y(y)}^{\frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y)} \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\Rightarrow \forall x, y \; ; \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

برای متغیرهای تصادفی گسسته نیز به طریق مشابه می‌توان نوشت.

$$\forall x_i, y_j \; ; \; \{X = x_i\} \perp\!\!\!\perp \{Y = y_j\} \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

یا

$$\forall x_i, y_i \; , \; P_r\{X = x_i \overset{\wedge}{\text{و}} Y = y_j\} = P_r\{X = x_i\}\, P_r\{Y = y_j\} \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

یا

$$\forall x_i, y_j \; ; \; P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i)\, P_Y(y_j) \iff X \perp\!\!\!\perp Y$$

۵ امید ریاضی در حالت دو بعدی

برای تابعی از دو متغیر تصادفی (X, Y) به صورت $g(X, Y)$ امید ریاضی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E\{g(X,Y)\} = Eg(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(x,y)}_{\text{مقادیری که تابع } g(x,y) \text{ اختیار می‌کند}} \; \underbrace{f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{\text{فراوانی مقادیری که } g(x,y) \text{ اختیار می‌کند}}$$

= معیاری از میانگین مقادیری است که $g(x,y)$ اختیار می‌کند.

این تعریف که تعمیمی از تعریف امید ریاضی در حالت یک بعدی است با قضیه اساسی امید ریاضی نیز همخوانی دارد

$$E\overbrace{g(X,Y)}^{Z} = EZ = \int z\, f_Z(z)\,dz \overset{\text{قضیه اساسی امید ریاضی}}{=} \iint g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

با توجه به تعریف بالا، خصوصیات امید ریاضی که در حالت یک بعدی بیان کردیم، در حالت دو بعدی نیز به صورت مشابه برقرار است که دارا هستند. برخی از آنها اشاره می‌کنیم

۱- امید ریاضی یک عملگر خطی است (همواره برقرار است، در هر فضایی با هر بعد)

$$E \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E g_i(X,Y)$$

۲- اگر داشته باشیم $g(X,Y) = g_1(X) + g_2(Y)$ در این صورت داریم

$$E_{X,Y}\, g(X,Y) = E_X\, g_1(X) + E_Y\, g_2(Y) \qquad \forall g_1(\cdot), g_2(\cdot)$$

اثبات :

$$E\,g(X,Y) = E\left\{ g_1(X) + g_2(Y) \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g_1(x) + g_2(y) \right\} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \right]}_{f_X(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx \right]}_{f_Y(y)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\, f_Y(y)\,dy = E_X\, g_1(X) + E_Y\, g_2(Y)$$

۳ـ اگر متغیرهای تصادفی X ، Y مستقل از هم باشند، داشته باشیم $g(x,y) = g_1(x)\, g_2(y)$

در این صورت داریم

$$E_{XY}\, g(X,Y) = E_{XY}\, g_1(X)\, g_2(Y) = E_X\, g_1(X)\; E_Y\, g_2(Y) \qquad \forall\, g_1(\cdot),\, g_2(\cdot)$$

اثبات :

$$E\, g(X,Y) = E\, g_1(X)\, g_2(Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, g_2(y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ X \perp Y \\ f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, g_2(y)\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \quad E\, g(X,Y) = E\, g_1(X)\, g_2(Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_X(x)\; g_2(y)\, f_Y(y)\; dx\, dy$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_X(x)\, dx}_{E_X g_1(X)}\; \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\, f_Y(y)\, dy}_{E_Y g_2(Y)}$$

$$= E_X\, g_1(X)\; E_Y\, g_2(Y)$$

$$\Rightarrow \quad E\, g_1(X)\, g_2(Y) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=\!=} E\, g_1(X)\; E\, g_2(Y)$$

* به طور کلی: اگر X و Y مستقل از هم باشند، هر تابعی از X نیز مستقل از هر تابعی از Y خواهد بود.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \forall g_1(\cdot), g_2(\cdot) \; ; \; \underbrace{g_1(X)}_{\text{یک متغیر تصادفی } Z_1} \perp\!\!\!\perp \underbrace{g_2(Y)}_{\text{یک متغیر تصادفی } Z_2}$$

زیرا هر پیش‌آمد در ارتباط با Z_1 مستقل از هر پیش‌آمد در ارتباط با Z_2 است

$\underbrace{\text{هر پیش‌آمد در ارتباط با } Z_1}_{\text{هر یک پیش‌آمد در ارتباط با } X \text{ است}} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\text{هر پیش‌آمد در ارتباط با } Z_2}_{\text{خود یک پیش‌آمد در ارتباط با } Y \text{ است}}$

در ادامه مشابه حالت تک بعدی، با کمک عملگر امید ریاضی، ابزارهایی را برای تجزیه و تحلیل و استخراج خصوصیات دو متغیر تصادفی به صورت توأم معرفی می‌کنیم. اولین ابزاری که معرفی می‌کنیم، ممان‌های متقابل دو متغیر تصادفی است.

* ممان‌های متقابل دو متغیر تصادفی X, Y (یا گشتاور متقابل)

برای دو متغیر تصادفی X و Y، ممان متقابل به صورت زیر تعریف می‌شود:

ممان متقابل X, Y از مرتبه‌ی nام نسبت به X و از مرتبه‌ی mام نسبت به Y $= M_{n,m} =$

$$R_{mn} = E\,X^n Y^m$$

$$\underbrace{E\,X^n Y^m}_{g(X,Y)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x^n y^m}^{g(x,y)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow E X^n Y^m = E X^n \, E Y^m$$

مشابه حالت یک بعدی، می‌توان برای دو متغیر تصادفی X, Y، ممان‌های متقابل مرکزی را نیز تعریف کرد.

* ممان متقابل مرکزی X, Y از مرتبه n ام نسبت به X، از مرتبه‌ی m ام نسبت به Y، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$C_{nm} = E \tilde{X}^n \tilde{Y}^m = E (X - m_X)^n (Y - m_Y)^m = \mu_{mn}$$

$$\tilde{X} = X - m_X \quad , \quad \tilde{Y} = Y - m_Y$$

* با توجه به خطی بودن عملگر امید ریاضی در روابط دو جمله‌ای و ضرب چند جمله‌ای ها، می‌توان همواره رابطه ای بین گشتاورهای متقابل مرکزی و گشتاورهای متقابل اصلی مرتبه های مساوی پایین تر پیدا کرد

* از بین گشتاورهای متقابل و گشتاورهای متقابل مرکزی دو متغیر تصادفی X و Y، گشتاورهای مرتبه اول نسبت به X و Y، کاربردهای بیشتری دارند (یعنی $n=m=1$) که در ادامه به بررسی و معرفی آنها خواهیم پرداخت.

۱- ممان متقابل مرتبه اول است ـ X , Y

$m=n=1$

$$M_{11} \equiv R_{11} = E\,XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

این ممان متقابل را همبستگی متقابل X , Y می‌گوییم و با r_{xy} نمایش می‌دهیم

$$r_{xy} = E\,XY$$

این عملگر در فضای متغیرهای تصادفی چند بعدی، معادل ضرب داخلی است. به این ترتیب مفهوم تعامد در متغیر تصادفی مطرح می‌شود.

$$r_{xy} = E\,XY = 0 \implies X \perp Y$$

قضیه: اگر x و y دو متغیر تصادفی متعامد (Orthogonal) باشند، داریم

$$E(x+y)^2 = \underbrace{Ex^2}_{P_x} + \underbrace{Ey^2}_{P_y}$$

با بیان ساده می توان گفت که اگر z یک متغیر تصادفی معادل حاصل جمع x و y باشد $z = x+y$

در این صورت توان متغیر تصادفی z برابر حاصل جمع توان های دو متغیر تصادفی x و y است

$$P_z = Ez^2 = P_x + P_y$$

اثبات:

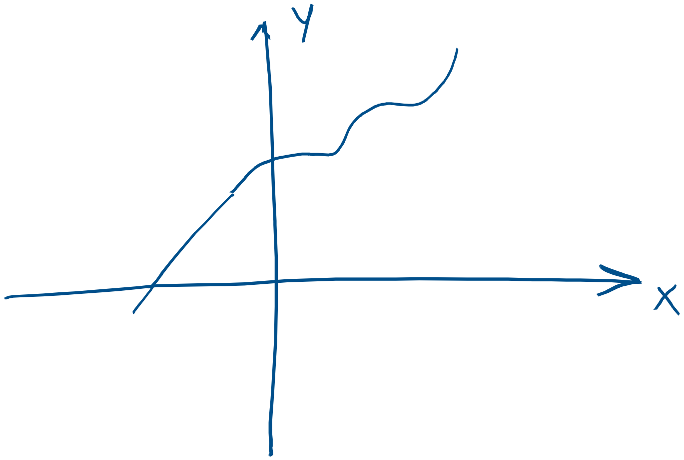
$$E(x+y)^2 = E(x^2+y^2+2xy) = Ex^2 + Ey^2 + 2\overbrace{Exy}^{0} = Ex^2 + Ey^2$$

۲- ممان متقابل مرکزی مرتبه اول نسبت به X , Y

$$n=m=1, \qquad C_{11}=\mu_{11}=E\tilde{X}\tilde{Y}=E(X-m_x)(Y-m_y)=C_{xy}=\sigma_{xy}$$

کوواریانس متقابل دو متغیر تصادفی X , Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y)\equiv C_{xy}\equiv\sigma_{xy}=E\tilde{X}\tilde{Y}=E(X-m_x)(Y-m_y)$$



C_{xy} معیاری از میزان رابطه‌ی خطی بین دو متغیر تصادفی

می‌تواند به دست دهد.

$$Cov(X,y) \equiv C_{xy} \equiv \sigma_{xy} = E\tilde{X}\tilde{Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

۱- اگر برای دو متغیر تصادفی X , Y داشته باشیم $Cov(X,y) = 0$

دو متغیر تصادفی را ناهمبسته می‌گوییم. (یعنی هیچ ارتباط خطی بین این دو متغیر وجود ندارد)

$$Cov(X,y) = 0 \Longrightarrow X \perp Y$$

نماد ناهمبسته بودن دو متغیر تصادفی

۲- همواره رابطه‌ای بین $\underbrace{\text{همبستگی متقابل}}_{\text{همان ممان متقابل مرتبه اول}}$ دو متغیر تصادفی و $\underbrace{\text{کواریانس متقابل}}_{\text{همان ممان متقابل مرکزی مرتبه اول}}$ آنها وجود دارد

$$C_{xy} = E\tilde{X}\tilde{Y} = E(X - m_x)(Y - m_y) = E(XY - m_x Y - m_y X + m_x m_y)$$

$$= E XY - m_x \overbrace{EY}^{m_y} - m_y \overbrace{EX}^{m_x} + m_x m_y = \underbrace{E XY}_{r_{xy}} - m_x m_y$$

خطی بودن عملگر امید ریاضی

$$\Longrightarrow \quad C_{xy} = r_{xy} - m_x m_y$$

با توجه به نکات ① و ② می‌توان نوشت،

اگر یکی از شرایط (معادل) زیر برقرار باشد، دو متغیر تصادفی x و y ناهمبسته هستند.

$$Cov(x,y) = C_{xy} = \sigma_{xy} = E\,\tilde{x}\,\tilde{y} = 0$$

یا

$$C_{xy} = r_{xy} - m_x m_y = 0$$

یا

$$\underbrace{r_{xy}}_{Exy} = \overbrace{m_x}^{Ex}\ \overbrace{m_y}^{Ey} \qquad \text{یا} \qquad Exy = Ex\,Ey$$

$$\Rightarrow \quad x \perp y$$

قضیه: اگر دو متغیر تصادفی X , Y ناهمبسته باشند، خواهیم داشت

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

با بیان ساده اگر X , Y ناهمبسته باشند، متغیر تصادفی Z به صورت حاصل جمع X , Y تعریف شود
آنگاه واریانس Z برابر حاصل جمع واریانس های دو متغیر تصادفی X , Y است

$$Var(Z) = Var(X) + Var(Y)$$

اثبات:

$$Var(Z) = E(Z - m_Z)^2 = E\left[X + Y - (m_x + m_y)\right]^2 = E\left[\underbrace{(X - m_x)}_{\tilde{X}} + \underbrace{(Y - m_y)}_{\tilde{Y}}\right]^2$$

$$Z = X + Y$$

$$m_Z = EZ = EX + EY = m_x + m_y$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(z) = \mathrm{Var}(x+y) = E\left[\tilde{x} + \tilde{y}\right]^2$$

$$= E\left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y}\right)$$

$$= \underbrace{E\tilde{x}^2}_{\mathrm{Var}(x)} + \underbrace{E\tilde{y}^2}_{\mathrm{Var}(y)} + 2\underbrace{E\tilde{x}\tilde{y}}_{C_{xy}=0} \qquad x \perp y$$

$x \perp y$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(z) = \mathrm{Var}(x) + \mathrm{Var}(y)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

همان طور که گفتیم ، C_{xy} می‌تواند معیاری از میزان رابطه‌ی خطی بین X و Y به دست بدهد.
برای این منظور پارامتری تحت عنوان ضریب همبستگی برای دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

ضریب همبستگی

$$\rho_{xy} \triangleq \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{Var(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

Correlation Coeficient

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y را کوواریانس نرمالیزه هم می‌گویند. زیرا کوواریانس متقابل X و Y با استفاده از $\sigma_y \sigma_x$ نرمالیزه شده است. می‌توان نشان داد که $|\rho_{xy}| \leq 1$

ρ_{xy} معیاری از میزان رابطه‌ی خطی بین X و Y را بدست می‌دهد

* هرچه $|\rho_{xy}|$ به مقدار 1 نزدیکتر باشد، رابطه‌ی بین X و Y خطی‌تر است.

* اگر $|\rho_{xy}| = 1$ باشد، یک رابطه خطی بین X و Y وجود دارد.

* اگر $|\rho_{xy}| = 0$ باشد، هیچ رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی X و Y وجود ندارد. یا به عبارت دیگر دو متغیر تصادفی $\underbrace{\text{ناهمبسته}}_{\text{Uncorrelated}}$ هستند

$$\rho_{xy} = 0 \implies C_{xy} = 0 \implies X \not\sim Y$$