به نام خدا

- تابع مشخصه (متغیر تصادفی پیوسته)
- تابع مولد احتمال (متغیر تصادفی گسسته)

مثال: متغیر تصادفی برنولی X را در نظر می‌گیریم.

$$X \sim \text{Bernolli}\,(p)$$

۱- تابع مولد احتمال متغیر تصادفی X را بدست بیاورید.

۲- میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را بدست بیاورید.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

$$P_X(0) = P_r\{X=0\} = 1-p, \qquad P_X(1) = P_r\{X=1\} = p$$

$$\Gamma_X(z) = E z^X = \sum_x z^x P_X(x) = z^0 P_X(0) + z^1 P_X(1)$$

$$\Gamma_X(z) = 1 - P + zP$$

۲- میانگین و واریانس X

راه حل اول - استفاده از تعریف میانگین و واریانس

$$m_X = EX = \sum_x x P_X(x) = 0\, P_X(0) + 1\, P_X(1) = P$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X - m_X)^2 = \underline{EX^2 - E^2X}$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 P_X(x) = 0^2 P_X(0) + 1^2 P_X(1) = P$$

$$\Longrightarrow Var(X) = \sigma_X^2 = EX^2 - E^2X = P - P^2 = P(1-P)$$

- راه حل دوم : استفاده از تابع مولد احتمال و خصوصیات آن

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = EX(X-1)\cdots(X-n+1)$$

$$\Gamma_X(z) = 1-P+PZ$$

$$\frac{d}{dz}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = EX \quad \xRightarrow{\Gamma_X(z)=1-P+PZ} \quad EX = P$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = EX(X-1) \Longrightarrow EX(X-1) = 0 \Longrightarrow EX^2 - EX = 0$$

$$\Rightarrow \quad EX^2 = EX = P$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = \sigma_X^2 = EX^2 - E^2X = P - P^2 = P(1-P)$$

تمرین: برای تمام متغیرهای تصادفی پیوسته معرفی شده در کتابهای قبلی درس تابع $\Phi_X(\omega)$ و

برای تمام متغیرهای تصادفی گسسته معرفی شده در کتابهای قبل تابع $\Gamma_X(z)$ را بدست بیاورید.

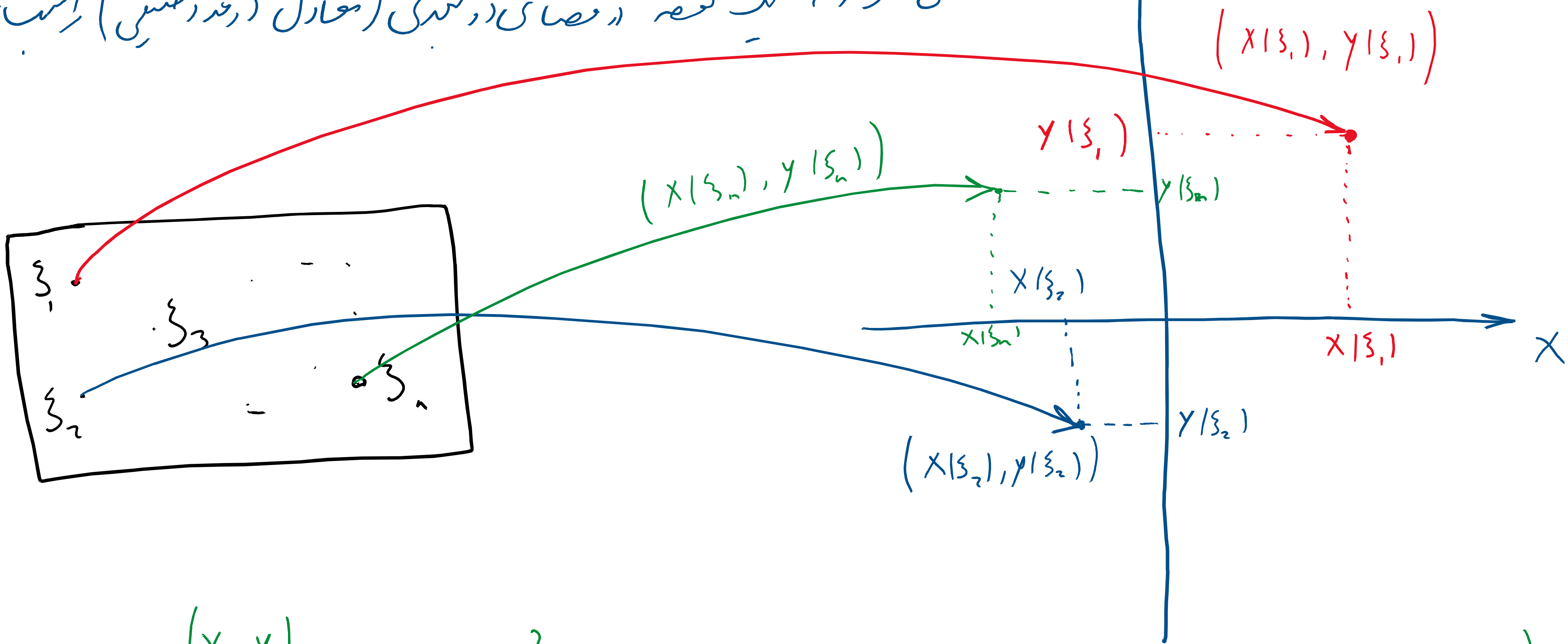
در بسیاری از کاربردهای عملی لازم است که دو متغیر تصادفی را به صورت توأم بررسی کنیم، خصوصیات آماری آنها و نحوه‌ی ارتباط آنها را با یکدیگر استخراج کنیم. بنابراین در ادامه درس به بررسی دو متغیر تصادفی به صورت توأم می‌پردازیم.

* دو متغیر تصادفی به صورت توأم (به صورت مشترک)

برای اینکه دو متغیر تصادفی را به صورت توأم (در کنار هم) بررسی و تجزیه و تحلیل کنیم، نیاز به ابزارهایی داریم که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

دو متغیر تصادفی $X \equiv X(\xi)$ و $Y \equiv Y(\xi)$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این دو متغیر تصادفی را به صورت توأم بررسی کنیم. بنابراین می‌توانیم آنها را به صورت زوج مرتب (X, Y) نمایش دهیم. به این ترتیب باید فضای دو بعدی نمونه خواهیم داشت.

زوج مرتب (X, Y) را می‌توان به صورت تابعی در نظر گرفت که به هر نقطه از
فضای نمونه، یک نقطه در فضای دو بعدی (معادل دو عدد حقیقی) را نسبت می‌دهد



$$\Omega \xrightarrow{(X, Y)} \mathbb{R}^2$$

((X, Y) را می‌توان متغیر تصادفی دو بعدی هم در نظر گرفت)

$\Omega \xrightarrow{X(\cdot)} \mathbb{R}$, $\Omega \xrightarrow{Y(\cdot)} \mathbb{R}$

دو متغیر تصادفی به صورت توام (X, Y)

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$$

بنابراین وقتی با دو متغیر تصادفی به صورت توام سروکار داریم، عملاً با فضای دو بعدی $\mathbb{R}^2$ سروکار خواهیم داشت. بنابراین به ابزارهایی نیاز داریم که بتواند در این فضای دو بعدی، امکان تجزیه و تحلیل و استخراج خصوصیات دو متغیر تصادفی به صورت توام را در اختیار ما بگذارد.

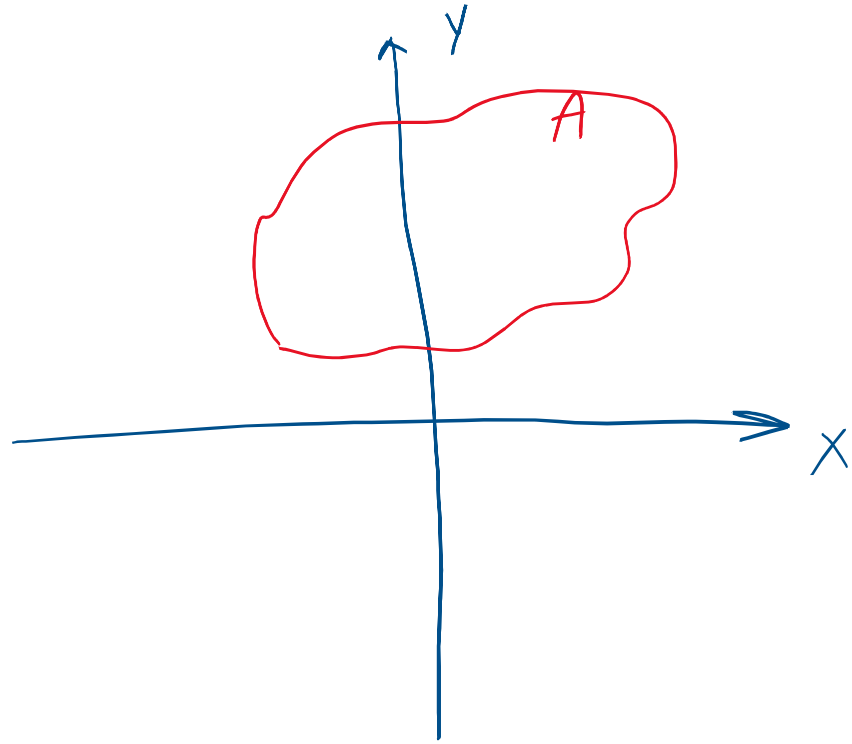
برای شروع کار، لازم است ابزارهایی داشته باشیم که با کمک آنها بتوانیم اصطلاح هر پیش‌آمدی در ارتباط با

(X, Y) را درست بیان کنیم. با توجه به اینکه در یک فضای دو بعدی قرار داریم، پیش‌آمدهایی که

در ارتباط با (X, Y) با آنها سروکار داریم، زیرمجموعه‌هایی

از فضای $\mathbb{R}^2$ هستند. بنابراین پیش‌آمدها

به فرم کلی زیر هستند



$(X, Y) \in A \quad , \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

برای این ترتیب لازم است که بتوانیم احتمال پیش آمدهایی به فرم زیر را به دست بیاوریم

$$P_r\{(X,Y)\in A\} \quad , \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$P_r\{\zeta \mid (X(\zeta), Y(\zeta)) \in A\}$$

در مورد هر یک از متغیرهای تصادفی X و Y به صورت جداگانه ، توابع احتمال $F_X(x)$, $f_X(x)$ و $F_Y(y)$ ، $f_Y(y)$ را می‌شناسیم. می‌خواهیم بدانیم که با داشتن این توابع ، می‌توان احتمال هر پیش‌آمدی در ارتباط با (X,Y) در فضای دو بعدی را به دست آورد یا خیر؟

می‌دانیم که با داشتن توابع احتمال $F_X(x)$ ، $f_X(x)$

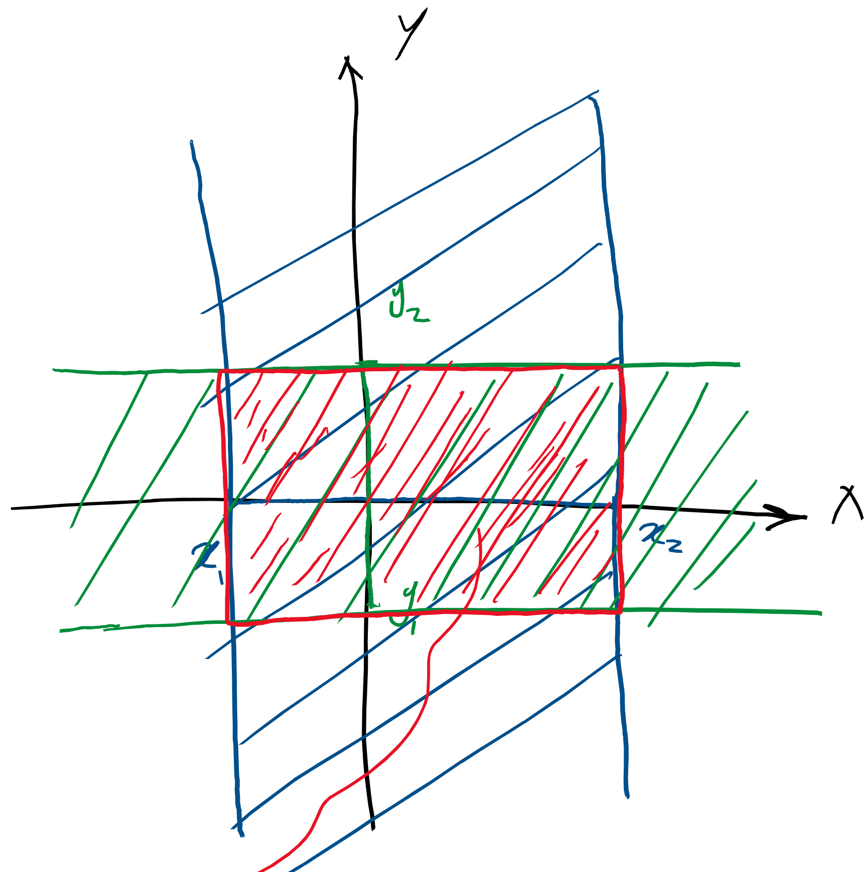
می‌توان احتمال هر پیشامدی به فرم $\{x_1 \le X \le x_2\}$

را به دست آورد. این پیشامدها در فضای دو بعدی

به صورت نوارهای موازی محور y هستند. بنابراین

با داشتن توابع احتمال X ، فقط می‌توان احتمال پیشامدهایی

که به فرم نوارهای موازی محور y هستند را به دست آورد.



$F_X(x) = P_r\{X \le x\}$

$\{x_1 < X \le x_2 \overset{\cap}{\text{و}} y_1 < Y \le y_2\}$

با داشتن $F_Y(y)$ و $f_Y(y)$ می‌توان احتمال پیشامدهای به فرم $\{y_1 < Y \le y_2\}$ را به دست آورد. این پیشامدها در فضای دو بعدی به صورت نوارهای موازی محور X هستند. بنابراین با داشتن توابع احتمال متغیر تصادفی Y فقط می‌توان احتمال پیشامدهایی که به فرم نوارهای موازی محور X هستند را به دست آورد.

$$F_Y(y) = P_r\{Y \le y\}$$

اما اگر تابعی تعریف کنیم که اشتراک این دو دسته پیشامد را در بر بگیرد، می‌توانیم با کمک آن احتمال پیشامدهایی به فرم چهارگوش را در فضای دو بعدی پیدا کنیم. سپس با کمک مفهوم دیفرانسیل دو بعدی از روی تابع تعریف شده، به تابعی می‌رسیم که احتمال هر پیشامدی در ارتباط با (X,Y) در فضای دو بعدی با کمک آن قابل محاسبه باشد.

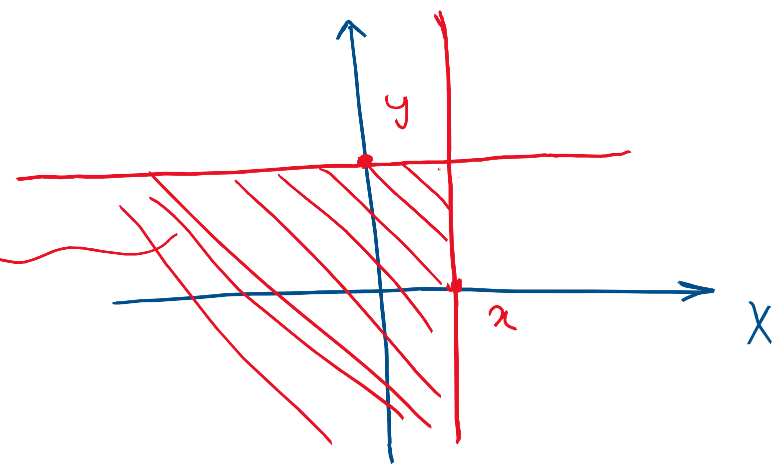
- تابع توزیع احتمال توأم (joint PDF)

برای این منظور تابع توزیع احتمال توأم دو متغیر تصادفی (X, Y) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{XY}(x, y) \triangleq P_r\{X \leq x \cap Y \leq y\}$$

$$= P_r\{\xi \mid X(\xi) \leq x ,\ Y(\xi) \leq y\}$$

$\{X \leq x ,\ Y \leq y\}$



در ادامه می خواهیم خصوصیات این تابع را بررسی کنیم و نشان دهیم که با کمک آن می توان احتمال هر پیش آمدی به فرم چهارگوش را در ارتباط با (X, y) در فضای دو بعدی به دست آورد.

وضعیت نقاط مرزی

1) $F_{xy}(-\infty, -\infty) = 0$

$\forall y \; ; \quad F_{xy}(-\infty, y) = 0$

$\forall x \; ; \quad F_{xy}(x, -\infty) = 0$

$F_{xy}(\infty, \infty) = 1$

$$2)\quad \forall y \;;\quad F_{xy}(\infty, y) = F_y(y)$$

توابع توزیع احتمال کناری

Marginal

$$\forall x \;;\quad F_{xy}(x, \infty) = F_x(x)$$

* در فضای دو بعدی ، توابع احتمال تک تک متغیرهای X , y یعنی $f_y(y), F_y(y), f_x(x), F_x(x)$ را توابع احتمال کناری یا Marginal می گوییم.

$$3)\quad P_r\{x_1 < X \leq x_2 \,,\; Y \leq y\} = F_{xy}(x_2, y) - F_{xy}(x_1, y)$$

$$P_r\{X \leq x \,,\; y_1 < Y \leq y_2\} = F_{xy}(x, y_2) - F_{xy}(x, y_1)$$

4) $P_r\{x_1 < X \le x_2 \,,\; y_1 < Y \le y_2\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1)$

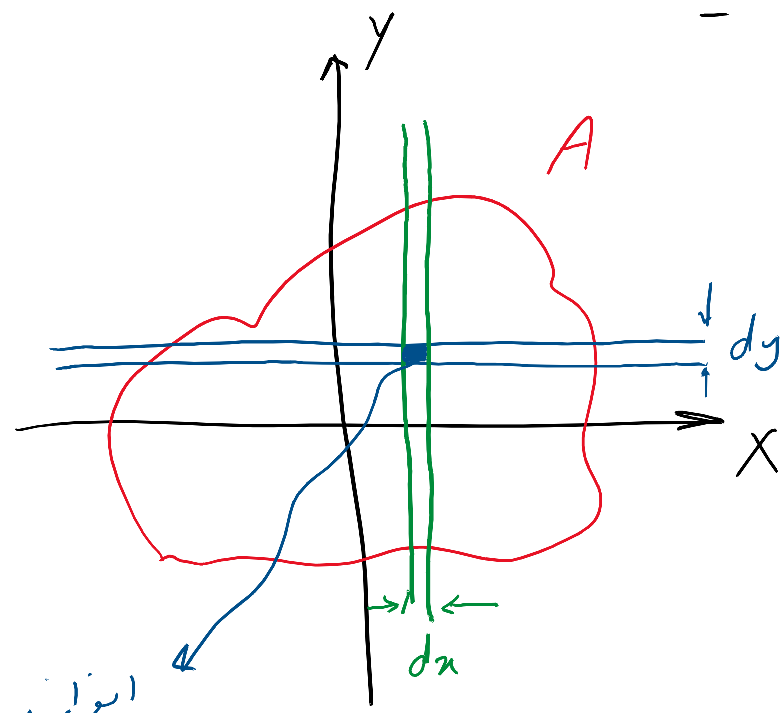
$- F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$

$\Leftarrow$ با یک تابع توزیع احتمال توأم $F_{XY}(x,y)$ می‌توان احتمال هر پیشامدی در ارتباط با (x,y) در فضای دو بعدی که به فرم چهارگوش یا اجتماع چهارگوش‌ها، قابل بیان باشد را به دست بیاوریم.

هدف ما این است که بتوانیم احتمال هر پیشامدی در ارتباط با (X , Y) را در فضای دو بعدی به دست بیاوریم.

برای این منظور از مفهوم دیفرانسیل کمک می‌گیریم.

اگر پیشامد A را به شکل مستطیل‌های کوچک دیفرانسیل دو بعدی با چهارگوش‌های بسیار کوچک تقسیم‌بندی کنیم، با انتگرال‌گیری دو بعدی از (دیفرانسیل دو بعدی تابع توزیع احتمال) می‌توان احتمال پیشامد A را به دست آورد.



برای این منظور، تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی (X, Y) را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{d^2}{dx\,dy} F_{XY}(x,y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{XY}(x,y)$$

joint pdf

$$\Longrightarrow \quad P_r\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f_{XY}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

* تابع چگالی احتمال توام (X,Y) تابعی است که با کمک آن می‌توانیم احتمال هر پیش‌آمدی در ارتباط با (X,Y) را در فضای دو بعدی به دست بیاوریم.

علاوه بر این تابع چگالی احتمال توام، دارای خصوصیات دیگری نیز هست که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

$$1)\quad f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{d^2}{dx\,dy} F_{XY}(x,y) \xRightarrow[F_{XY}(x,y)\ \text{در}\ -\infty]{\text{نقاط مرزی}} F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$\Longrightarrow F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta + \cancel{c_1}^{\,0}g_1(x) + \cancel{c_2}^{\,0}g_2(y)$$

$F_{XY}(x,y)$ با توجه به نقاط مرزی

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta = 1$$

تابع چگالی احتمال توام نرمالیزه است

نقطه حدی $(+\infty, \infty)$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = f_Y(y)$$

توابع چگالی احتمال کناری

Marginal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = f_X(x)$$

* با داشتن توابع احتمال توام ، می توان توابع احتمال کناری را به دست آورد.

روابطی که تاکنون نوشتیم برای متغیرهای تصادفی پیوسته بیان شد. برای متغیرهای تصادفی گسسته نیز به صورت مشابه می توان روابط را بازنویسی کرد.

- تابع جرم احتمال توام برای دو متغیر تصادفی گسسته (X, Y) به صورت زیر بیان می شود.
(joint pmf)

$$P_{XY}(x, y) = P_r\{X = x \cap Y = y\}$$

$$P_r\{(X, Y) \in D\} = \sum_{D}\sum P_{XY}(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} P_{XY}(x_i, y_j)$$

$$D = \{(x_i, y_j)\}_{i=1,\dots n_1,\ j=1,\dots,m_1}$$

$$f_{XY}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{XY}(x_i, y_j)\,\delta(x-x_i,\ y-y_j)$$

$$(X,Y) \in \{(x_i, y_j)\} \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{matrix}$$

$$F_{XY}(x,y) = \underbrace{\sum\sum}_{\substack{X \leq x,\ Y \leq y}} P_{XY}(x_i, y_j)$$

$$\underbrace{X \leq x,\ Y \leq y}_{x_i \leq x,\ y_j \leq y}$$

تمام نکاتی که در حالت پیوسته، بیان کردیم به طور معادل در حالت گسسته نیز قابل بیان هستند، فقط باید توجه داشته باشیم که به جای $\int$ از $\sum$ استفاده می‌کنیم و نقاط دارای احتمال هستند.

به عنوان مثال:

$$\sum_{x_i} \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$$

$$(X, Y) \in \{(x_i, y_j)\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

$$\sum_{x_i} P_{x}(x_i, y_j) = P_Y(y_j) \quad , \quad \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i)$$

به این ترتیب، با معرفی توابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی (X, Y)، می‌توانیم احتمال هر پیش‌آمدی در ارتباط با (X, Y) را در فضای دو بعدی به دست بیاوریم. علاوه بر این خصوصیات آماری دو متغیر تصادفی (X, Y) را استخراج کنیم و ابزارهای دیگری برای آنالیز و کار کردن با دو متغیر تصادفی به صورت توأم را نیز معرفی کنیم و نحوه‌ی ارتباط دو متغیر تصادفی را استخراج کنیم.