به نام خدا

توابعی از یک متغیر تصادفی

۱- راه حل کلی

$g(x)$

$$Y = g(X) \quad , \quad F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{X \in A_y\} = \int_{A_y} f_X(x)\,dx$$

$$, \; f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

اگر شرایط خاصی برقرار باشد، می‌توان یک راه حل بسته برای به دست آوردن $f_Y(y)$ معرفی کرد.

۲- راه حل ساده (فرم بسته) برای $f_Y(y)$

$y = g(x)$ جواب‌های g هستند

اگر معادله $\boxed{y = g(x)}$ دارای تعداد شمارش‌پذیر جواب به صورت $x_1, x_2, \dots, x_k$ باشد (یعنی $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots, y_k = g(x_k)$) و تابع $g(\,)$ در نقاط جواب مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f_Y(y)$ به فرم بسته زیر قابل بیان است.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)|_{x=x_i}}$$

سمت راست این عبارت تابعی از y است
اما y در x_i ها مشترک است زیرا x_i ها
جواب های معادله $y = g(x)$ هستند و در نتیجه تابعی از y دارند.

مثال: فرض کنیم متغیر تصادفی تصادفی به صورت زیر از روی متغیر تصادفی X ساخته شده است

$$Y = ax+b = g(x)$$

تابع $f_Y(y)$ را برحسب $f_X(x)$ به دست بیاورید

$$y = ax+b$$

$$Y = ax+b \xRightarrow{a \neq 0} x_1 = \frac{y-b}{a}$$

معادله یک جواب دارد

$g(x)$ یک رابطه خطی است و در تمام نقاط مشتق پذیر است. شرایط استفاده از راه حل ساده بهم

بسته برقرار است.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)|}\Bigg|_{x=x_i} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

مخرج

$$x_1 = \frac{y-b}{a}$$

$$g(x) = ax + b \longrightarrow g'(x) = a$$

تمرین: اگر داشته باشیم $Y = |X|$ ، آیا شرایط استفاده از اصل ساده برقرار است؟
اگر شرایط برقرار است، $f_Y(y)$ را با کمک قضیه این اصل ساده به دست بیاورید

* مفهوم امید ریاضی Expectation

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی به صورت $g(X)$ ، به شکل زیر تعریف می‌شود

$$E\{g(X)\} = E\,g(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(x)}_{\text{مقادیری که تابع } g(x) \text{ اختیار می‌کند}} \underbrace{f_X(x)\,dx}_{\text{نشان دهنده‌ی فراوانی}}$$

متغیر تصادفی

مقادیری که X اختیار می‌کند

$\equiv$ تابعیت از X ندارد زیرا میانگین‌گیری روی تمام مقادیر X انجام شده است

بنابراین می‌توان گفت که $Eg(x)$ نشان دهنده‌ی میانگین مقادیری است که $g(x)$ اختیار می‌کند.

* اگر به $g(x)$ به شکل یک متغیر تصادفی نگاه کنیم یعنی $Y = g(x)$ آنگاه می‌توان نوشت

متغیر تصادفی

$$Eg(x) = EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

یعنی $f_Y(y)$ را به دست بیاوریم، انتگرال بالا را برای محاسبه $Eg(x)$ محاسبه کنیم.

براساس یک قضیه که به آن قضیه اساسی امید ریاضی گفته می‌شود، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = E\, g(X)$$

(اثبات با توجه به مطالب گفته شده ساده است : برای مطالعه)

نکته دیگری در مورد امید ریاضی قابل توجه است، این است که امید ریاضی یک عملگر خطی است.

یعنی داریم

$$E\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, E g_i(x)$$

ضرایب اسکالر

اثبات:

$$\underbrace{E\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)}_{} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)\right)}_{} f_x(x)\, dx =$$

قضیه اساسی امید ریاضی

$$\Rightarrow E\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(x) = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} a_i\, g_i(x)\, f_x(x)\, dx$$

ضرایب اسکالر

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x)\, f_x(x)\, dx}_{E g_i(x)}$$

$$\Rightarrow E\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E g_i(x)$$

مثال: برای متغیر تصادفی X، $f_X(x)$ را در اختیار داریم. متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Y = aX + b = g(X)$$

که در آن a و b ضرایب اسکالر هستند.

امید ریاضی Y را به دست بیاورید.

$$EY = Eg(X) = E(aX+b) = Eax + Eb = aEX + b$$

$Y = g(X)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\, dx$$

خطی بودن امید ریاضی

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$Eb = \int_{-\infty}^{\infty} b f_X(x)\, dx = b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx}_{1} = b$$

نکته: جای دو عملگر خطی را می‌توان با هم عوض کرد. به عنوان مثال

$$E \frac{d}{d\alpha} g(x) = \frac{d}{d\alpha} E g(x)$$

جای دو عملگر خطی را عوض می‌کنیم

* با کمک عملگر امید ریاضی می‌توان گشتاورهای یک متغیر تصادفی را تعریف کرد. گشتاورهای یک متغیر تصادفی اطلاعاتی را در مورد خصوصیات آماری آن متغیر به دست می‌دهند.

- ممان های یک متغیر تصادفی Moment

برای یک متغیر تصادفی X، ممان مرتبه‌ی nام به صورت زیر تعریف می‌شود:

ممان مرتبه‌ی nام متغیر تصادفی X $\triangleq E X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$

* ممان های یک متغیر تصادفی می‌توانند مشخصه های (یا خصوصیاتی) از متغیر تصادفی را برای ما به دست بدهند.

از بین ممان های یک متغیر تصادفی، ممان های اول و دوم بیشترین کاربرد را دارند که در ادامه به بررسی آنها می پردازیم.

الف) ممان مرتبه اول متغیر تصادفی X

ممان مرتبه ی اول $\longrightarrow$ $n = 1$

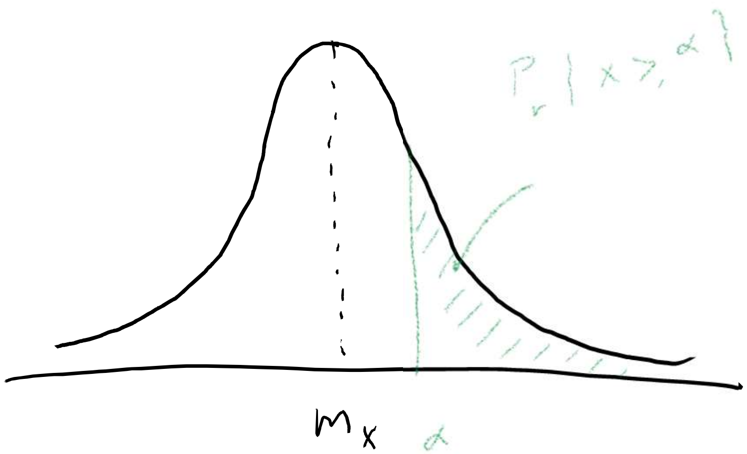
$$E X^1 = E X = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\text{مقداری که متغیر تصادفی } x \text{ اختیار می کند}} \underbrace{f_X(x)}_{\text{فراوانی}} \, dx = \underbrace{m_X \equiv \eta_X \equiv \mu_X}_{\text{نوتاسیون های متفاوت برای میانگین}}$$

Mean

EX نشان دهنده ی میانگین مقادیری است که x اختیار می کند.

میانگین $\equiv$ Mean $= EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \equiv \eta_X \equiv \mu_X \equiv m_X$

اگر به $f_X(x)$ مشابه تابع چگالی جرمی نگاه کنیم، m_X معادل مرکز ثقل متغیر تصادفی X است که نقطه تعادل آن نیز محسوب می‌شود.



$\Leftarrow$ اگر $f_X(x)$ حول نقطه‌ای مانند $x=a$ دارای تقارن باشد، بدون محاسبه EX می‌توان نتیجه‌گیری کرد که

$m_X = \mu_X \equiv \eta_X \equiv EX = a$

یک نامساوی مهم که در مورد ممان اول متغیر تصادفی X برقرار است، نامساوی مارکف

Markov inequality

نام دارد که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P_r\{X \geq \alpha\} \leq \frac{EX}{\alpha}$$

با ممان مرتبه‌ی دوم یک متغیر تصادفی

ممان مرتبه دوم $\longrightarrow n = 2 \longrightarrow EX^2$

ممان مرتبه دوم متغیر تصادفی x

$$= EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{\text{مقادیری که } x^2 \text{ اختیار کند}} \underbrace{f_x(x)\,dx}_{\text{فراوانی}} = P_x \equiv \text{Power of } x$$

EX^2 نشان دهنده‌ی میانگین بزرگی مقادیری است که متغیر تصادفی x اختیار می‌کند به همین جهت به آن قدرت متغیر تصادفی x گفته می‌شود و با P_x نمایش داده می‌شود.

قدرت یک متغیر تصادفی را Mean Square آن متغیر تصادفی می‌گویند.

$$EX^2 \equiv \text{Mean Square}$$

به جذر $EX^2 = P_x$ ، مقدار rms متغیر تصادفی نیز گفته می‌شود.

$$rms = \sqrt{EX^2} \equiv \sqrt{P_x}$$

: root mean square

* برای یک متغیر تصادفی X ، ممان های مرکزی نیز تعریف می‌شوند. ممان های مرکزی یک متغیر تصادفی X ، در ارتباط با متغیر تصادفی مرکزی متناظر با X ، تعریف می‌شود.

* ممان های مرکزی متغیر تصادفی X

ممان مرکزی مرتبه n ام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{ممان مرکزی مرتبه } n \text{ ام } X \triangleq E(\underbrace{X-\eta_x})^n \equiv E(X-m_x)^n = E(X-\mu_x)^n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_x)^n f_x(x)\, dx$$

* در واقع مقدار میانگین متغیر تصادفی را از آن کم کرده ایم. به متغیر تصادفی که با این کار به دست می آید، متغیر تصادفی مرکزی متناظر با X گفته می شود

(مثل این است که مبدأ مختصات را به مرکز ثقل منتقل کرده باشیم)

متغیر تصادفی مرکزی $\uparrow \tilde{X} = X - \eta_x$

* ممان مرکزی مرتبه اول هر متغیر تصادفی X برابر صفر است. $E\bar{X} = 0$

$$\text{ممان مرکزی مرتبه اول} = E(X-\eta_x)^1 = E(X-\eta_x) = EX - E\underbrace{\eta_x}_{\text{یک اسکالر}} = EX - \underbrace{\eta_x}_{} = 0$$

η_x

خطی بودن $E(.)$

* یکی از پرکاربردترین ممان‌های مرکزی متغیر تصادفی X، ممان مرکزی مرتبه دوم آن است.

$$\text{ممان مرکزی مرتبه دوم} \equiv E(X-\eta_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x-\eta_x)^2}_{\text{بزرگی انحراف x از مقدار میانگین خودش است}} \underbrace{f_x(x)\,dx}_{\text{فراوانی}}$$

$n = 2$

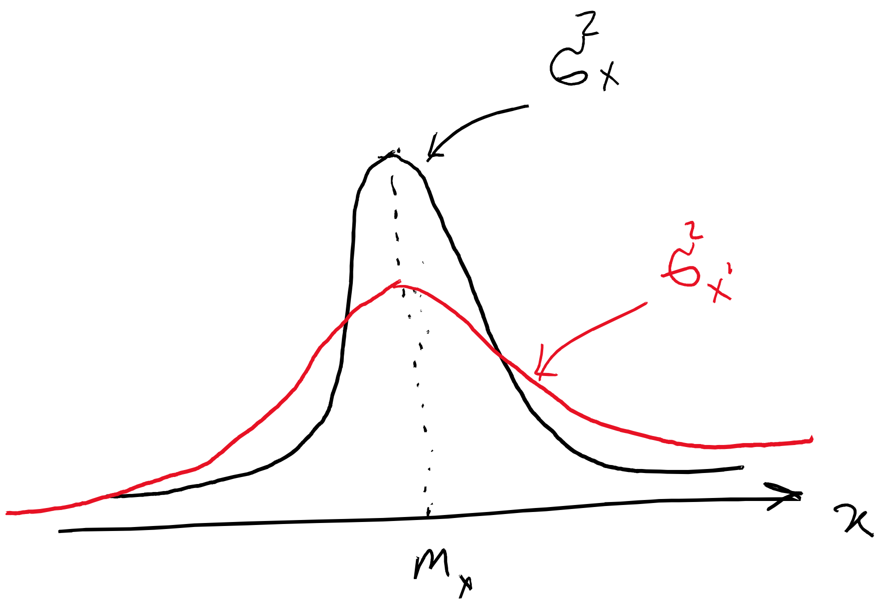
گشتاور مرکزی مرتبه دوم متغیر تصادفی X نشان دهنده میانگین بزرگی انحراف X از مقدار میانگین خودش است و از این جهت آن را واریانس متغیر تصادفی X نیز گفته می‌شود.

$$E(X-\eta_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_x)^2 f_x(x)\,dx = Var(X) = \sigma_x^2$$

* جذر واریانس را انحراف از معیار (Standard Deviation) می‌گویند زیرا نشان دهنده میزان انحراف متغیر تصادفی x از مقدار میانگین خودش است.

واریانس: σ_x^2

انحراف از معیار: σ_x



$\sigma_{x'}^2 > \sigma_x^2$

انحراف x' از مقدار میانگین بیشتر از انحراف x از مقدار میانگین است.

هرچه σ_x^2 کمتر باشد، توزیع x حول میانگین، بیشتر است در نتیجه نمودار $f_x(x)$ حول m_x باریک‌تر و بلندتر خواهد بود.

* با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی و تعریف ممان های مرکزی، همواره می‌توان رابطه‌ای بین ممان مرکزی مرتبه‌ی n ام و ممان های مرتبه n ام و پایین‌تر متغیر تصادفی پیدا کرد.

ممان مرکزی مرتبه‌ی n ام $= E(X-\eta_x)^n = E\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} X^i \eta_x^{n-i}\right)$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \eta_x^{n-i} \underbrace{EX^i}$$

خاصیت خطی بودن $E(\cdot)$

ممان مرتبه‌ی i ام متغیر تصادفی x

$i \in \{0, 1, \dots n\}$

مثال - برای متغیر تصادفی X، رابطه σ_x^2 را با گشتاورهای اول و دوم متغیر تصادفی X بیابید.

$$\sigma_x^2 = E(X-\eta_x)^2 = E(X^2 - 2\eta_x X + \eta_x^2)$$

گشتاور مرکزی مرتبه دوم

$$= EX^2 - 2\eta_x \underbrace{EX}_{\eta_x} + \eta_x^2 = EX^2 - \eta_x^2 = EX^2 - E^2X$$

خطی بودن $E(.)$

$$= EX^2 - (EX)^2 = \underbrace{EX^2} - \underbrace{E^2X} \geq 0$$

گشتاور مرتبه دوم — گشتاور مرتبه اول

$$\sigma_X^2 = \underbrace{E(X-\eta_x)^2}_{\text{میانگین مقادیر غیرمنفی}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_x)^2 f_X(x)\,dx \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_X^2 = EX^2 - E^2X \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad EX^2 \geq \underbrace{E^2X}_{(EX)^2}$$

(فرم خاصی از نامساوی شوارتز)