به نام خدا

- معرفی متغیرهای تصادفی پرکاربرد

الف) حالت پیوسته

ب) حالت گسسته

در این بخش می‌خواهیم چند متغیر تصادفی گسسته که در بحث‌های مهندسی کاربردهای زیادی دارند، معرفی کنیم.

## ۱- توزیع برنولی Bernolli

متغیر تصادفی برنولی $X$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases} \longrightarrow X \sim \text{Bernolli}(p)$$

بنابراین این متغیر تصادفی را می‌توان برای مدل‌سازی آزمایش‌های تصادفی که دارای دو نتیجه هستند، استفاده کرد. علاوه بر این اگر در آزمایش تصادفی یک پیش‌آمد خاص مد نظر باشد، می‌توان از متغیر تصادفی برنولی برای مدل‌سازی رخ دادن پیش‌آمد مورد نظر در آزمایش تصادفی استفاده کرد

به این صورت که اگر پیش آمد مورد نظر رخ بدهد، مقدار متغیر تصادفی $X$ برابر 1 خواهد بود

و در غیر این صورت مقدار متغیر تصادفی $X$ برابر 0 در نظر گرفته می شود. در این حالت

$P$ احتمال رخ داد پیش آمد مورد نظر است.

به طور مثال در آزمایش پرتاب تاس اگر پیش آمد مورد نظر $A$، این باشد که عدد به دست آمده کوچکتر از 3

باشد، می توانیم از متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر برای مدل سازی این آزمایش استفاده کنیم.

$A = \{$ نتیجه پرتاب تاس یک عدد کوچکتر از 3 باشد $\}$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } 1/3 \quad (\text{اگر پیش آمد مورد نظر رخ دهد}) \\ 0 & \text{با احتمال } 2/3 \quad (\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

## ۲- توزیع هندسی (Geometric)

این توزیع در ارتباط با تکرارهای مستقل یک آزمایش تصادفی (آزمایش برنولی) تعریف می‌شود.

متغیر تصادفی $X$ را دارای توزیع هندسی می‌گوییم اگر $X$ نشان دهنده‌ی تعداد آزمایش‌های لازم برای اولین رخداد پیش‌آمد مورد نظر باشد.

با توجه به تعریف متغیر تصادفی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که متغیر تصادفی $X$ مقادیری از مجموعه $\{1, 2, \ldots\}$ را اختیار می‌کند. برای اینکه این متغیر تصادفی را به صورت آماری بشناسیم، لازم است که تابع pmf آن را به دست بیاوریم.

می دانیم که برای یک متغیر تصادفی گسسته تابع pmf نشان دهنده احتمال نقاط اسکالری است که X اختیار می کند. بنابراین داریم

$$P_X(i) = P_r\{X = i\}, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$= P_r\{$ اینکه در $i-1$ آزمایش اول پیشامد مورد نظر رخ ندهد و در آزمایش $i$ ام رخ دهد $\}$

$$= \underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{(i-1)\ \text{بار}}\, p = (1-p)^{i-1}\, p = P_X(i)$$

$$X \sim \text{Geometric}(p)$$

## ۳- توزیع دوجمله‌ای منفی (پاسکال)

متغیر تصادفی $X$ را دارای توزیع دوجمله‌ای منفی می‌گوییم اگر $X$ نشان دهنده‌ی تعداد آزمایش‌های لازم برای $r$ امین رخداد پیشامد مورد نظر باشد.

متغیر تصادفی $X$ مقادیری از مجموعه $\{r, r+1, r+2, \dots\}$ را اختیار می‌کند.

* به دست آوردن pmf

$P_X(i) = P_r\{X = i\} = P_r\{$ اینکه در آزمایش $i$ ام پیشامد مورد نظر رخ بدهد و در $i-1$ آزمایش قبلی، پیشامد مورد نظر $r-1$ بار (با هر ترتیبی) رخ داده باشد $\}$

$$= p \binom{i-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{i-1-(r-1)}$$

$$\longrightarrow P_X(i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r} \longrightarrow X \sim Pascal(r, p)$$

۲- توزیع دوجمله‌ای (Binomial)

متغیر تصادفی $X$ را دارای توزیع دوجمله‌ای گوییم اگر $X$ نشان دهنده ی تعداد رخ داد پیشامد مورد نظر در $n$ بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی باشد

متغیر تصادفی $X$ مقادیری از مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ را اختیار می‌کند

* به دست آوردن pmf

$P_X(i) = P_r\{X = i\} = P_r\{$ اینکه در $n$ بار تکرار آزمایش پیشامد مورد نظر $i$ بار (با هر ترتیبی) رخ دهد $\}$

$$P_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

## ۵- توزیع پواسن (Poisson)

یک متغیر تصادفی $X$ را دارای توزیع پواسن می‌گوییم اگر $X$ نشان دهنده‌ی تعداد رخ داد پیش آمد مورد نظر در یک نهایت تکرار مستقل یک آزمایش تصادفی باشد. علاوه بر این متغیر تصادفی پواسن می‌تواند نشان دهنده‌ی تعداد رخ داد پیش آمد مورد نظر در بازه‌های زمانی مشاهده یک پدیده باشد. به این ترتیب متغیر تصادفی پواسن برای مدل سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی نیز قابل استفاده است. به عنوان مثال تعداد دفعات تغییر مدار یک الکترون در اتم‌ها، تعداد افرادی که در یک زمان خاص به یک حمام وارد می‌شوند (یا خارج می‌شوند) یا تعداد درخواست‌های شروع مکالمه در یک شبکه‌ی مخابراتی، پدیده‌هایی

هستند که با استفاده از متغیر تصادفی پواسن قابل مدل سازی هستند. از این نظر متغیر تصادفی پواسن

یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی گسسته است.

* به این ترتیب متغیر تصادفی پواسن را می‌توانیم حد متغیر تصادفی دوجمله‌ای بدانیم وقتی $n \to \infty$

با شرط $np \to a$

بنابراین می‌توانیم pmf متغیر تصادفی پواسن را با داشتن pmf متغیر تصادفی دوجمله‌ای با

میل دادن $n$ به سمت بی‌نهایت با شرط $np \to a$ به دست بیاوریم.

متغیر تصادفی پواسن $X$ ، مقادیری از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots\}$ را اختیار می‌کند.

* بدست آوردن $pmf$ متغیر تصادفی پواسن

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \underbrace{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}_{\text{pmf متغیر تصادفی دو جمله‌ای}}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\Rightarrow P_X(i) = P_r\{X=i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{(n-i+1)(n-i+2)\cdots(n-1)n}{i!}\, p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{i \text{ تا}}}{i!}\, p^i (1-p)^{n}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n^i p^i}{i!} (1-p)^{n}$$

$$n-i+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} n$$

$$n-i+2 \longrightarrow n$$

$$\vdots$$

$$n-1 \longrightarrow n$$

$$n-i \longrightarrow n$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-p)^n = e^{-pn}$$

$$\Longrightarrow \quad P_X(i) = P_r\{X=i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{(np)^i}{i!} e^{-pn}$$

$$= \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$

$$\Longrightarrow \quad P_X(i) = P_r\{X=i\} = e^{-a} \frac{a^i}{i!}$$

$\rightarrow X \sim \text{Poisson}(a)$

## * توابعی از متغیرهای تصادفی

در بحث متغیرهای تصادفی، از نظر کاربردی در بسیاری از مواقع با توابعی از متغیرهای تصادفی سروکار داریم. به عنوان پارامتری از یک سیستم را به صورت یک متغیر تصادفی $X$، مدل سازی کرده ایم و می خواهیم پردازشی بر روی $X$، انجام دهیم. مثلاً $X$ را از یک فیلتر عبور دهیم یا $|X|$ را محاسبه کنیم یا $X^2$ را به دست بیاوریم. در همه ی این موارد با توابعی از متغیر تصادفی $X$ سروکار داریم. هدف این است که با داشتن خصوصیات آماری $X$ بتوانیم اطلاعاتی در مورد خصوصیات آماری تابعی از $X$ (یعنی $g(X)$) به دست بیاوریم.

فرض کنیم تابع $g(\cdot)$ را روی متغیر تصادفی $X$ اعمال می‌کنیم. داریم

$$Y = g(X)$$

$Y$ نیز یک متغیر تصادفی است. زیرا

$$X \equiv X(\xi)$$

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R} \xrightarrow{g(\cdot)} \mathbb{R}$$

$$Y = g(X(\xi)) \Longrightarrow Y \equiv Y(\xi)$$

$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R} \quad , \quad Y = Y(\xi)$$

$$\boxed{\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g(\cdot)} \mathbb{R}}$$

$Y$ متغیر تصادفی است.

در این بخش می خواهیم با داشتن خصوصیات آماری $X$ (یعنی توابع احتمال $F_X(x)$ , $f_X(x)$)

بتوانیم خصوصیات آماری $Y$ (یعنی $F_Y(y)$ , $f_Y(y)$) را به دست بیاوریم.

$$Y = g(X)$$

برای به دست آوردن توابع احتمال متغیر تصادفی $Y$ از تابع توزیع احتمال شروع می کنیم.

$$F_Y(y) \triangleq P_r\{Y \leq y\} = P_r\{\underbrace{g(X) \leq y}\} = P_r\{X \in A_y\}$$

$Y = g(X)$

مثلا $X \leq g^{-1}(y)$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{g(X) \leq y\} \equiv P_r\{X \in A_y\}$$

عملیات ریاضی برای تعیین $A_y$ باید انجام شود

$$= \int_{A_y} f_X(x)\,dx \equiv F_Y(y) =$$ تابعی از $y$

عملیات ریاضی برای محاسبه انتگرال

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

مثال: متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ را در نظر بگیرید.
برای متغیر تصادفی $Y$ که در ادامه تعریف می‌شود، تابع توزیع احتمال $F_Y(y)$ و $f_Y(y)$ را به دست بیاورید.

1) $y = ax + b \quad \longrightarrow \quad y = g(x) = ax + b$

2) $y = |X| \quad \longrightarrow \quad y = g(x) = |X|$

(1

$$Y = g(X) = aX + b$$

$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{aX + b \leq y\} = P_r\{aX \leq y - b\}$$

$A_y$

$$= \begin{cases} P_r\left\{X \leq \dfrac{y-b}{a}\right\} & a > 0 \\[2ex] P_r\left\{X \geq \dfrac{y-b}{a}\right\} & a < 0 \end{cases}$$

$A_y$

$$= \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\[2ex] 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \times \frac{1}{a} & a > 0 \\ -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \times \frac{1}{a} & a < 0 \end{cases}$$

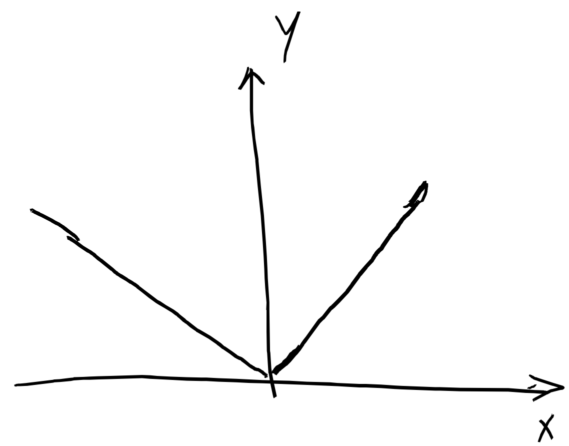
$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$Y = g(X) = |X| \quad , \; Y \geq 0$ (12

$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{|X| \leq y\} = P_r\{\underbrace{-y \leq X \leq y}_{X \in A_y}\}$$

$$= \int_{-y}^{y} f_X(\alpha)\, d\alpha = F_X(y) - F_X(-y) \qquad y \geq 0$$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$= \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & \text{oth} \end{cases}$$

یادآوری: می‌دانیم که اگر با متغیرهای تصادفی گسسته سروکار داشته باشیم، لازم است که از تابع pmf آن‌ها استفاده کنیم و انتگرال‌گیری‌ها معادل $\sum$ خواهند بود.

$$P_X(i) = P_r\{X = i\}$$

$$\underset{\text{گسسته}}{Y} = g(\underset{\text{گسسته}}{X}) \quad , \quad P_Y(j) = P_r\{\overset{g(x)}{Y} = j\}$$

$$= \sum_{\substack{g(i)=j \\ \text{یا} \\ g(x)=j}} P_X(x) \equiv \text{تعمیمی از } j$$

$$\equiv P_Y(j)$$