بنام خدا

www.dr-haghbin.info/Courses/undergraduate/

۱- تعریف مفاهیم پایه در آمار و احتمال

* آزمایش تصادفی　　trial - Experiment

یک آزمایش است که به نتایجی مانند $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$

منجر می‌شود ولی نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نیست.

مثال: پرتاب تاس

اگر یک تاس را یک بار پرتاب کنیم، ممکن است یکی از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ ظاهر شود. نتایج ممکن برای این آزمایش تصادفی یکی از اعداد مجموعه ی

$$\{\underset{\xi_1}{1}, \underset{\xi_2}{2}, 3, 4, 5, \underset{\xi_6}{6}\}$$

است.

مثال: پرتاب سکه

وقتی یک سکه را یک بار پرتاب می‌کنیم ممکن است یکی از دو نتیجه‌ی شیر یا خط (H یا T) ظاهر شوند. بنابراین نتیجه‌ی آزمایش تصادفی، یکی از مقادیر مجموعه‌ی $\{H, T\}$ است.

* فضای نمونه Sample Space

مجموعه‌ای از تمام نتایج ممکن آزمایش تصادفی است که آن را با S نمایش می‌دهیم.

در مثال پرتاب سکه، فضای نمونه

$$\Omega = \{H, T\}$$

در مثال پرتاب تاس، فضای نمونه

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$: محدود و شمارش پذیر

* فضای نمونه می‌تواند یک مجموعه ی محدود یا نامحدود باشد.

همچنین می‌تواند یک مجموعه شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد.

گسسته — پیوسته

* آزمایش تصادفی: اندازه گیری دمای یک اتاق در ساعات مختلف روز

$\Omega = [10, 30]$: شمارش ناپذیر و کراندار

* آزمایش تصادفی: انتخاب یک عدد حقیقی منفی

$\Omega = (-\infty, 0) = \mathbb{R}^{-}$ = شمارش ناپذیر، ناکراندار

* پیشامد Event یا رخداد

مجموعه ای است از بعضی نتایج آزمایش تصادفی. به عبارت دیگر یک پیشامد E

یک زیرمجموعه از فضای نمونه است.

$$E \subseteq \Omega$$

مثال: در آزمایش پرتاب تاس، پیشامد زوج بودن نتیجه‌ی آزمایش پیشامدی

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

یا پیشامد اینکه نتیجه کمتر از 4 باشد،

$$E_2 = \{1, 2, 3\}$$

در بحث احتمالات، یکی از مباحث مهم این است که بتوانیم به هر پیش آمد یک
احتمال را به صورت یک عدد بین صفر و یک نسبت بدهیم. با توجه به اینکه
پیش آمدها، زیرمجموعه هایی از فضای نمونه Ω هستند، لازم است که
اطلاعاتی در مورد نظریه ی مجموعه ها نیز داشته باشیم.

یادآوری: نظریه ی مجموعه ها

* مجموعه (set)، گروهی از اعضا یا اشیاء را مجموعه می گوییم.

به عنوان مثال:

$A = \{1, H, -2\}$ شمارش پذیر و محدود

$B = \{2, 4, 6, \dots\}$ شمارش پذیر و نامحدود (بی کران)

$C = [-1, 1]$ شمارش ناپذیر و محدود (کران دار)

به هر یک از اعضای مجموعه، یک عنصر یا یک عضو (element)
که
می گوییم.

* مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B می‌گوییم اگر هر عضو از A در B نیز وجود داشته باشد.

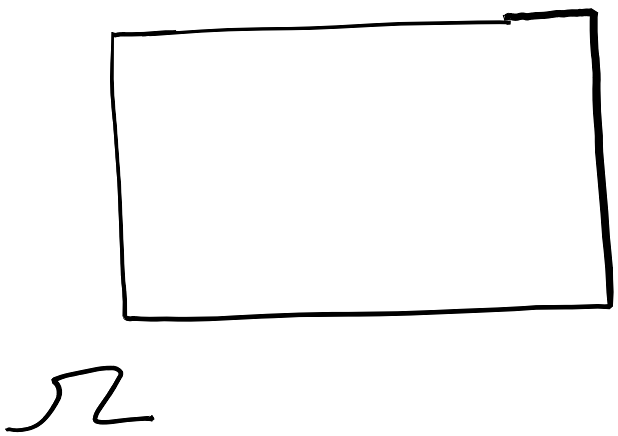
$$A \subseteq B$$

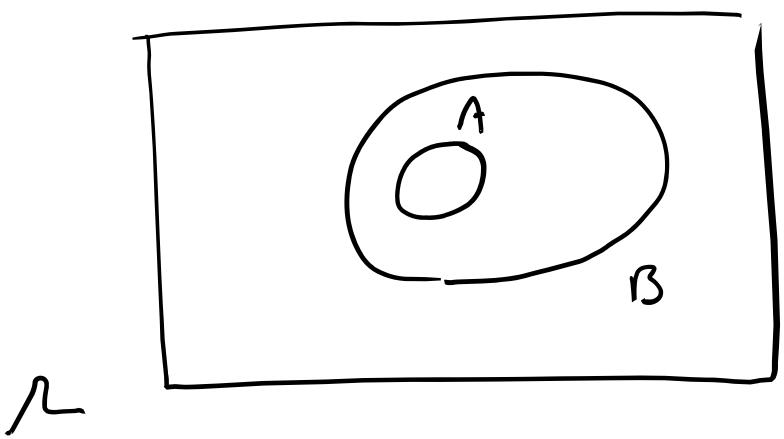
* مجموعه‌ی A را مساوی مجموعه‌ی B می‌گوییم اگر اعضای دو مجموعه یکسان باشند.

$$A \subset B \quad \text{و} \quad B \subset A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

* مجموعه‌ی تمام المان‌های ممکن را مجموعه‌ی مرجع Ω نمایش می‌دهیم

Venn Diagram دیاگرام ون





$A \subset B$

• مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه‌ی تهی می‌گوییم

$\{\}$ یا ϕ

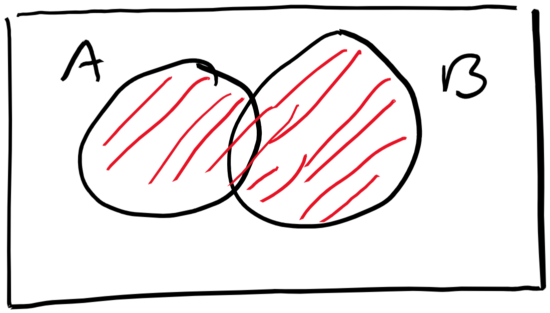
× مفهوم اجتماع در مجموعه

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cup B$ یا $A+B$

نمایش می‌دهیم که مجموعه‌ای است که اعضای آن یا عضو A هستند یا عضو B

(یا هر دو)

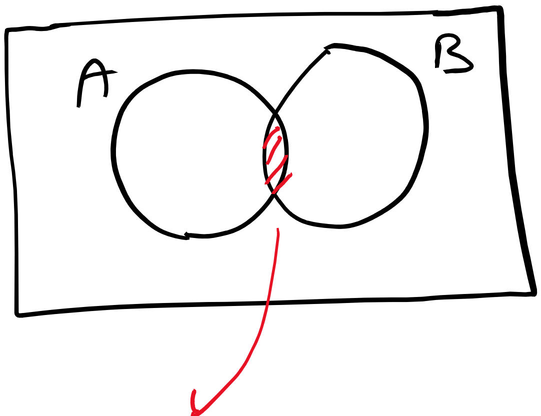
$A \cup B$



Ω

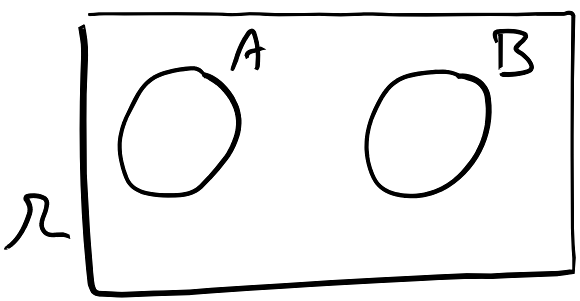
* مفهوم اشتراک در مجموعه

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را به صورت $A \cap B$ یا AB نمایش می‌دهیم که مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو A و هم عضو B هستند.



$A \cap B$

* دو مجموعه را جدا از هم (Disjoint) می‌گوییم اگر اشتراک آنها برابر تهی باشد.

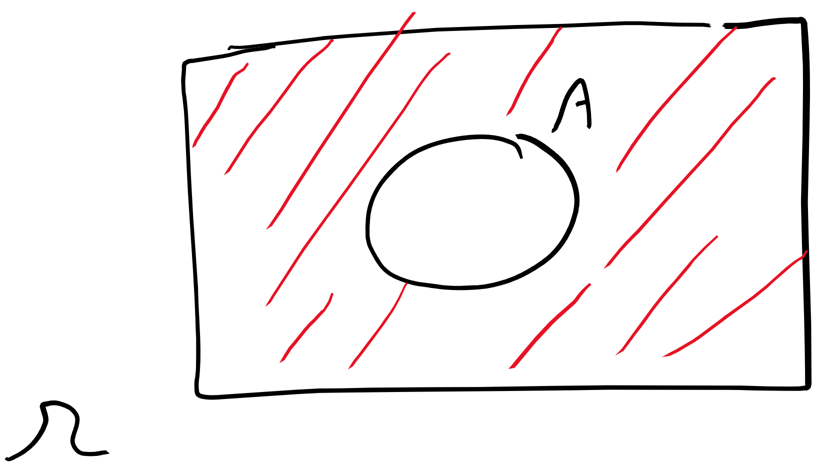


$$A \cap B = \phi$$

* مفهوم مکمل یک مجموعه

منظور از مجموعه‌ی مکمل A، مجموعه‌ای از اعضای جهان است که در A موجود نیست. $\bar{A}$ یا A^c

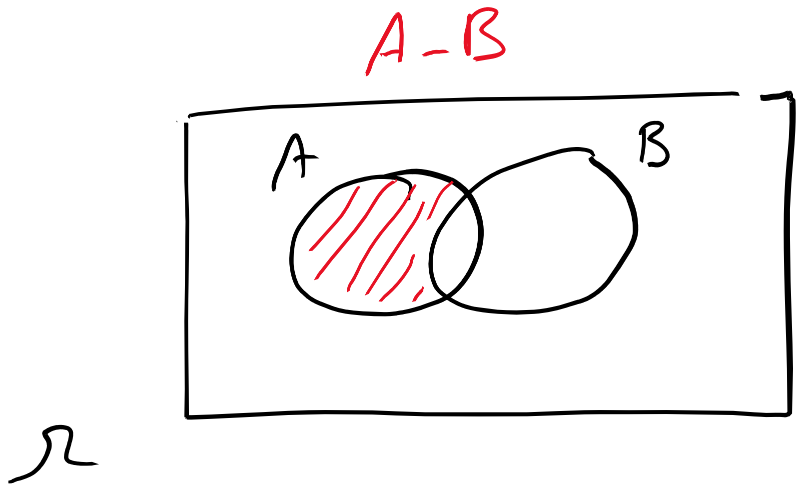
A^c یا $\bar{A}$



* مفهوم تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه ی A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$A - B = A \cap \bar{B}$$



یادآوری چند قانون در مجموعه ها

1) $A \cup \varphi = A \quad , \quad A \cup \Omega = \Omega$

2) $A \cap \varphi = \varphi \quad , \quad A \cap \Omega = A$

3) $A \subset B \quad , \quad B \subset A \iff A = B$

قوانین شرکت پذیری

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ قوانین توزیع پذیری

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6) $A \cup B = B \cup A$ قوانین جابه جایی

$A \cap B = B \cap A$

7) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ قوانین دمرگان

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

* مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ را روی هم فرسای گوییم اگر

exhaustive

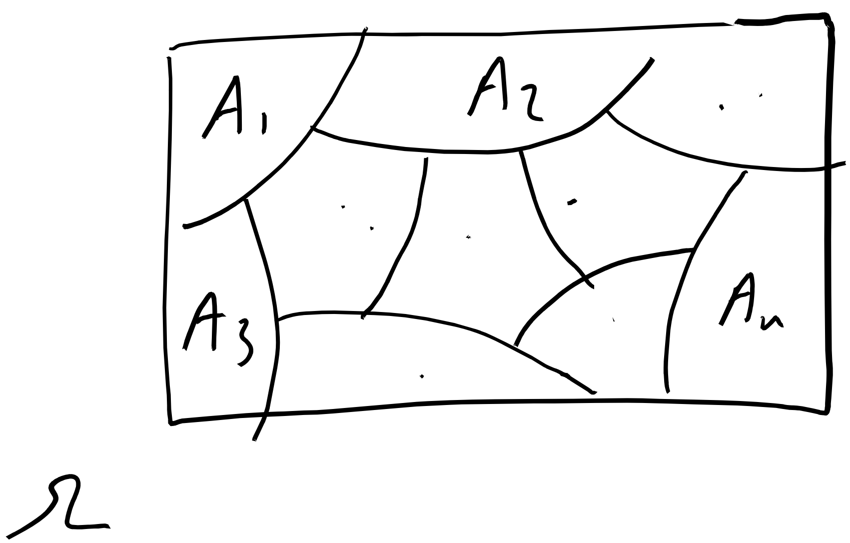
داشته باشیم:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{اختصار}$$

* اگر مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ روی هم فرسا و دو به دو جدا از هم باشند، می گوییم $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک افراز از مجموعه ی Ω است.

$\forall\, i \neq j,\quad A_i \cap A_j = \varphi \;,\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$



* حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

منظور از حاصلضرب دکارتی دو مجموعه ی A و B ، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی (a_i , b_j) است که در آن $a_i \in A$ و $b_j \in B$.

$$A \times B = \{ (a_i , b_j) \mid a_i \in A , b_j \in B \}$$

مثال:

$$A = \{1, 2, \dots, 6\}, \qquad B = \{H, T\}$$

$$A \times B = \{(1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H), (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)\}$$

در بحث احتمال، مجموعه‌ی بالا معادل فضای نمونه‌ی پرتاب یک سکه و یک تاس است. (اول پرتاب تاس و بعد پرتاب سکه)

* بدیهی است که ترتیب در حاصلضرب دکارتی، اهمیت دارد.

با این مقدمه، به بحث احتمالات می‌پردازیم. هدف اصلی در این بخش این است که بتوانیم در ارتباط با یک آزمایش تصادفی و پیشامد مورد نظر، یک عدد را به عنوان احتمال پیشامد مورد نظر مطرح کنیم.

در این ارتباط، فضای احتمال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

* فضای احتمال

یک فضای احتمال از عناصر زیر تشکیل می‌شود

۱- فضای نمونه یا Ω که به عنوان مجموعه‌ای از تمام نتایج ممکن آزمایش های تصادفی)

2- یک زیرمجموعه از Ω که آن را پیش آمد می گوییم $\in$

3- یک عدد که به عنوان احتمال پیش آمد در نظر مطرح می شود. P

$F \leftarrow$ مجموعه‌ای از تمام پیش آمدهای احتمال پذیر

فضای احتمال $= (\Omega, \in, P)$ یا $(\Omega, \in, P(\in))$

P یا $P(\in)$ یا $P_r\{\in\}$

در مورد فضای نمونه و پیشامد قبلاً توضیحاتی داده ایم . در ادامه می خواهیم
در مورد احتمال (تابع احتمال) برای یک پیشامد صحبت کنیم.

* پیشامدی را که احتمال آن برابر صفر باشد، پیشامد غیرممکن می گوییم.

پیشامد $\{\phi\}$ یک پیشامد غیرممکن است. $P_r\{\phi\} = 0$

* پیشامدی که احتمال آن برابر یک باشد را یک پیشامد حتمی می گوییم.

پیشامد Ω یک پیشامد حتمی است. $P_r\{\Omega\} = 1$

* دو پیشامد A و B را جدا از هم می‌گوییم اگر $A \cap B = \phi$

(یعنی هیچ وقت A و B با هم اتفاق نمی‌افتند)

بر این اساس، احتمال یک پیشامد E به صورت تابع $P(E)$ یا

$P_r\{E\}$ تعریف می‌شود. این تابع دارای شرایط زیر است،

برای هر پیشامد E یک تابع احتمال به صورت $P(E)$ تعریف می‌شود،

۱- احتمال هر پیشامد یک عدد غیر منفی است $\forall E \subseteq \Omega \ , \ P(E) \geqslant 0$

۲- همواره داریم $P(\Omega) = 1$

۳- اگر پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ دو به دو جدا از هم باشند یعنی

$$\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

آنگاه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(مبانی ۳ بالا مربوط به فضاهای جبری است، Borel Field یا σ-Field
که به جزئیات ریاضی آن نمی‌پردازیم)

با استفاده از اصول سه گانه ی بالا، می توان به هر پیشامد، یک احتمال به صورت یک عدد بین صفر و یک اختصاص داد.

در این رابطه، قضایای زیر را مطرح می کنیم. این قضیه ها به ما کمک می کنند تا بتوانیم احتمال هر پیشامد دلخواهی را در فضای نمونه، به دست بیاوریم.

قضیه ی یک: اگر A یک پیشامد با احتمال $P(A)$ باشد، داریم:

$$P(A^c) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

اثبات: می‌دانیم $A \cup A^c = \Omega$

با توجه به اینکه داریم $A \cap A^c = \phi$ می‌توان نوشت.

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) \underset{\text{اصل 3}}{=} P(A) + P(A^c)$$

با توجه به اصل 2 می‌دانیم که $P(\Omega) = 1$ در نتیجه

$$P(A) + P(A^c) = 1 \implies P(A^c) = 1 - P(A)$$

قضیه 2 : همواره داریم $P(\phi) = 0$

اثبات : این قضیه در واقع نتیجه‌ای از قضیه‌ی قبل است،

$$\phi^c = \Omega \quad , \quad P(\Omega) = 1$$

$$\Longrightarrow P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$$