بنام خدا

$$\Omega = \{(g,g),\ (g,b),\ (b,g),\ \underbrace{(b,b)}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{1}{3}$$

- آزمایش های تکراری

منظور از آزمایش های تکراری، این است که یک آزمایش تصادفی را در شرایط یکسان و به طور مستقل تکرار کنیم. به طور مثال یک سکه را ده بار پرتاب کنیم یا یک تاس را پنج بار پرتاب کنیم و بر روی نتایج این آزمایش ها را کار کنیم.

* اگر فضای نمونه آزمایش تصادفی ساده (یک بار انجام آزمایش) را با Ω نمایش دهیم و آزمایش را n بار تکرار کنیم، فضای نمونه ی این آزمایش تکراری یک فضای جدید خواهد بود که آن را با Ω^n نمایش می دهیم و داریم:

$$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{}$$

n بار ضرب کارتزین تجربه Ω در خودش

مثال: یک سکه را پنج بار پرتاب می‌کنیم. فضای این نمونه این آزمایش تکراری را به دست بیاورید.

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$\Omega_5 = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{\text{پنج بار}} = \{H, T\} \times \{H, T\} \times \dots \times \{H, T\}$$

$$\Omega_5 = \{ (H, H, H, H, H), (H, H, H, H, T), (H, H, H, T, H), \dots, (T, T, T, T, T) \}$$

نتیجه آزمایش اول

نتیجه آزمایش دوم

نتیجه آزمایش سوم

نتیجه آزمایش چهارم

نتیجه آزمایش پنجم

آزمایش اول

آزمایش پنجم

$$(\_\_ , \_\_ , \_\_ , \_\_ , \_\_) \rightarrow$$ کل تعداد حالات = 2^5

تعداد اعضای Ω_5

2 حالت   2 حالت   2 حالت   2 حالت   2 حالت

* اگر فضای نمونه آزمایش تصادفی ساده یعنی Ω دارای m عضو باشد و آزمایش تصادفی را n بار تکرار کنیم، فضای نمونه این آزمایش تکراری یعنی Ω^n دارای m^n عضو خواهد بود.

هدف ما در این بخش این است که بتوانیم احتمال پیشامدهایی را که در ارتباط با آزمایش‌های تکراری تعریف می‌شوند، به دست بیاوریم. برای حل اینگونه مسائل باید به یاد داشته باشیم که آزمایش‌های تکراری در ارتباط با تکرار مستقل یک آزمایش تصادفی در شرایط یکسان تعریف می‌شوند.

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp A_n$$

این مطلب را با استفاده از چند مثال، بیان خواهیم کرد.

مثال ۱- فرض کنیم که سکه‌ای در اختیار داریم که در آن احتمال شیر آمدن برابر P است

$$P_r\{H\} = P \longrightarrow P_r\{T\} = 1-P$$

این سکه را پنج بار پرتاب می‌کنیم. احتمال پیش‌آمدهای زیر را به دست بیاورید.

الف) پیش‌آمدی که دو بار اول خط بیاید و سه بار بعدی شیر بیاید. پیش‌آمد A

ب) پیش‌آمدی که دو بار خط بیاید. پیش‌آمد B (ترتیب مهم نیست)

$$A = \{ (T, T, H, H, H) \}$$

= { بار اول خط بیاید و بار دوم خط و بار سوم شیر و بار چهارم شیر و بار پنجم شیر بیاید

$$\Rightarrow P(A) = P_r\{T\} \times P_r\{T\} \times P_r\{H\} \times P_r\{H\} \times P_r\{H\}$$

$$\Rightarrow P(A) = (1-P)(1-P)\,P\,P\,P = (1-P)^2 P^3$$

$B = \{$ بیشتر از آنکه دو بار خط بیاید $\}$

$$(1-p)(1-p)ppp \qquad p(1-p)(1-p)pp \qquad pp(1-p)(1-p)p$$

$$= \{ (T, T, H, H, H), (H, T, T, H, H), (H, H, T, T, H),$$

$$\ldots\ldots, (H, H, H, T, T) \}$$

$= \{$ دو بار اول خط و بقیه شیر یا بار دوم و سوم خط و بقیه شیر یا ...... یا دو بار آخر خط و بقیه شیر $\}$

$\Longrightarrow \quad P(B) =$ (تعداد حالت‌هایی که دو بار خط بیاید) $\left((1-p)^2 p^3 \right)$

$$P(B) = \sum P(\text{دو بار خطا و سه بار شیر بیاید})$$

$$= P(\text{دو بار اول خطا و سه بار بعدی شیر}) + P(\text{بار دوم و سوم خطا و بقیه شیر بیاید}) + \dots + P(\text{دو بار آخر خطا و بقیه شیر})$$

$$= \text{تعداد حالت هایی که دو بار خطا و سه بار شیر بیاید} \times (1-P)^2 P^3$$

$$= P((T,T,H,H,H)) + P((H,T,T,H,H)) + \dots + P((H,H,H,T,T))$$

$$\Rightarrow P(B) = \binom{5}{2}(1-P)^2 P^3$$

مطالب اشاره شده در مثال قبل را تحت عنوان آزمایش های برنولی فرمول بندی می کنند.

* آزمایش های برنولی Bernolli Trials (Experiments)

آزمایش برنولی، آزمایش تصادفی در نظر گرفته می شود که نتیجه آن فقط دو حالت ممکن داشته باشد. به عبارت دیگر نتیجه این آزمایش، دو پیشامد A و $\bar{A}$ هستند.

به عنوان مثال قطع بودن یا وصل بودن یک کلید در یک مدار الکتریکی یا مثبت بودن زمینی بودن یک عدد غیرصفر

* اگر احتمال پیشامد (مورد نظر) A برابر p باشد یعنی $P(A) = p$

که در نتیجه داریم

$$\underbrace{P(\bar{A}) = 1-P}$$

* اگر این آزمایش تصادفی را n بار تکرار کنیم (به طور مستقل و در شرایط یکسان) احتمال اینکه پیش آمد $\underset{P}{A}$ به مقدار K بار در روند تکرار این آزمایش تصادفی و با ترتیب مشخص، رخ بدهد، برابر است با

$$P^K (1-P)^{n-K}$$

= احتمال K بار رخداد A با یک ترتیب مشخص در n بار تکرار آزمایش تصادفی

* احتمال اینکه در n بار تکرار آزمایش تصادفی، پیش آمد A به تعداد k بار رخ بدهد (ترتیب مهم نیست)

$$\binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} \triangleq \underbrace{P_n(k)}_{\text{نماد}}$$

احتمال k بار رخ دادن پیش آمد A در n بار تکرار آزمایش تصادفی

* در مورد $P_n(k)$ به نکته زیر باید توجه داشته باشیم:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} = \left(p + (1-p)\right)^{n} = 1^{n} = 1$$

یادآوری: بسط دوجمله‌ای

$$(a+b)^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n-i}$$

مثال 2 - یک جعبه حاوی N ترانزیستور در اختیار داریم. می‌دانیم M تای آنها خراب است $(M \leq N)$. از این جعبه، به طور تصادفی یک ترانزیستور برمی‌داریم، آن را تست می‌کنیم و به جعبه برمی‌گردانیم. این آزمایش را n بار تکرار می‌کنیم. احتمال این پیشامد را حساب کنید که در این آزمایش‌ها، k ترانزیستور خراب باشند. (آزمایش در شرایط یکسان و به طور مستقل تکرار می‌شود) (ترتیب مهم نیست)

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

احتمال خراب بودن ترانزیستور در یک آزمایش تصادفی (آزمایش ساده)

$$P(A) = \frac{M}{N} \longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{M}{N}$$

$$\Longrightarrow P_n(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

تمرین: در مثال قبل اگر بعد از تست کردن ترانزیستورها، آن را به جعبه برگردانیم، احتمال این پیش آمد را حساب کنید که k ترانزیستور از n ترانزیستور تست شده، خراب باشند.

آزمایش‌های برنولی قابل تعمیم به آزمایش‌هایی که بیش از دو حالت دارند نیز هست که در ادامه به بیان این موضوع می‌پردازیم.

* آزمایش برنولی تعمیم یافته   Extended Bernolli Trials

آزمایش برنولی براساس تکرار آزمایش های مستقلی است که نتیجه آنها شامل دو پیشامد A و $\bar{A}$ است. برای آزمایش برنولی تعمیم یافته، آزمایش هایی را در نظر میگیریم که نتیجه آنها شامل یک افراز روی مجموعه Ω هستند

آزمایش برنولی   آزمایش برنولی تعمیم یافته

یک افرازی از S : $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$

$\sum_{i=1}^{r} P(A_i) = 1$, $P(A_i) = P_i$, $i=1,2,\dots,r$

این آزمایش تصادفی را n بار تکرار می کنیم. می خواهیم احتمال این پیش آمد را محاسبه کنیم که

پیش آمد A_i به تعداد k_i بار رخ بدهد $(i=1,2,\dots,r)$ $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$

1- اگر ترتیب مشخص باشد

$$P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r} = \prod_{i=1}^{r} P_i^{k_i}$$

2- اگر ترتیب مهم نباشد

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

مثال 3 - یک جعبه داریم که درآن سه گوی قرار دارد و روی گوی ها عددهای ۱ و ۰ و ۱- نوشته شده است. به صورت تصادفی یک گوی را از جعبه بر می داریم، عدد روی آن را یادداشت می کنیم و آن را به جعبه برمی گردانیم. این آزمایش را 8 بار تکرار می کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

$P_1 = \frac{1}{2}$ ، $P_2 = \frac{1}{8}$ ، $P_3 = \frac{3}{8}$

احتمال انتخاب گوی اول (1)

احتمال انتخاب گوی دوم (0)

احتمال انتخاب گوی سوم (-1)

الف) احتمال اینکه اعداد به دست آمده به صورت (۱ , ۰ , ۱ , ۱- , ۰ , ۱ , ۰ , ۱-) باشد. پیش آمد A

ب) احتمال اینکه سه بار صفر، سه بار یک و دو بار منفی یک داشته باشیم. پیش آمد B

$$P(A) = P_1^3 \; P_2^3 \; P_3^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$P(B) = \binom{8}{3,3,2} P_1^3 \, P_2^3 \, P_3^2 = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

مثال 4 : در آزمایشگاه به مقاومت هایی نیاز داریم که مقدار آنها دقیقاً برابر $10\,\Omega$ باشد.
می دانیم که فقط 1% مقاومت های موجود در بازار، این خصوصیت را دارند. دست کم چه
تعداد مقاومت برای این آزمایشگاه باید خریداری شود تا به طوری که با احتمال 95% دست کم
یکی از مقاومت ها، خصوصیت مورد نظر ما را داشته باشند.

فرض کنیم n مقاومت خریداری کرده ایم. آنها را تست کرده ایم و مشاهده کرده ایم که با احتمال 0.95
دست کم یکی از مقاومت ها برابر $10\,\Omega$ است.

احتمال اینکه یک مقاومت دارای مقدار دقیق $(10\,\Omega)$ باشد برابر 0.01 است.

$$P(A) = 0.01$$

پیش‌آمد اینکه دست کم یکی از مقاومت‌های خریداری شده دقیق باشد = پیش‌آمد B

یکی از مقاومت‌ها دقیق باشد یا دو مقاومت یا سه مقاومت ... یا n مقاومت دقیق = B

$$P(B) = 0.95$$

برای حل این مسئله باید احتمال پیش‌آمد B را با توجه به تعریف بالا، به دست بیاوریم که رابطه‌ای برحسب n خواهد بود و با مساوی قرار دادن رابطه با $P(B)=0.95$ به یک معادله برحسب n می‌رسیم.

از حل این معادله، n را به دست می‌آوریم.

$P(B) = P_r$ {یک مقاومت دقیق یا دو مقاومت یا سه مقاومت ... یا n مقاومت دقیق باشند}

$\cup \quad \cup \quad \cup$

همان طور که می‌بینیم، پیشامد B از اجتماع $n-1$ پیشامد دیگر تشکیل شده است و محاسبه احتمال آن می‌تواند راه حل را طولانی و زمان بر کند. به همین جهت احتمال پیشامد مکمل B را در نظر می‌گیریم: می‌دانیم

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.95 = 0.05 \quad (1)$$

از طرفی

پیشامد $\bar{B}$ = پیشامد اینکه هیچ یک از n مقاومت خریداری شده دقیق نباشند

$$P(\bar{B}) = \binom{n}{0} (0.01)^0 (1-0.01)^n = (0.99)^n \quad (2)$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Longrightarrow (0.99)^n = 0.05 \Longrightarrow n \log 0.99 = \log 0.05$$

$$\Longrightarrow n = \frac{\log 0.05}{\log 0.99} \quad , \quad n = \left[\frac{\log 0.05}{\log 0.99} \right]^+$$

مثال 5 : یک نوع دیود داریم که احتمال خرابی آن قبل از 1000 ساعت کار برابر 0.15 است. به تعداد 100 عدد از این دیود خریداری کرده‌ایم. احتمال این پیش آمد را حساب کنید که تعداد 95 تا یا بیشتر از این دیودها، قبل از 1000 ساعت کار، سالم باشند.

$\underbrace{\text{تا یا بیشتر}}$

دست کم 95 تا از این دیودها قبل از 1000 ساعت کار سالم باشند.

$P(A) = 0.15$

A : پیش آمد اینکه یک دیود قبل از 1000 ساعت کار خراب بشود

$P(\bar{A}) = 0.85$

$\bar{A}$: پیش آمد اینکه یک دیود قبل از 1000 ساعت کار سالم باشد

پیش آمد B = پیش آمد اینکه دست کم 95 دیود قبل از 1000 ساعت کار سالم باشند (1)

پیش آمد B = پیش آمد اینکه حداکثر 5 دیود قبل از 1000 ساعت کار خراب شوند (2)

$$P(B) \overset{(1)}{=} \sum_{k=95}^{100} (0.85)^k (0.15)^{100-k} \binom{100}{k} \overset{(2)}{=} \sum_{k'=1}^{5} (0.15)^{k'} (0.85)^{100-k'} \binom{100}{k'}$$