به نام خدا

* احتمال شرطی
* قضیه احتمال کلی در فرمول بیز
- چند مثال
* کانال باینری متقارن Binary Symmetric channel (BSC)

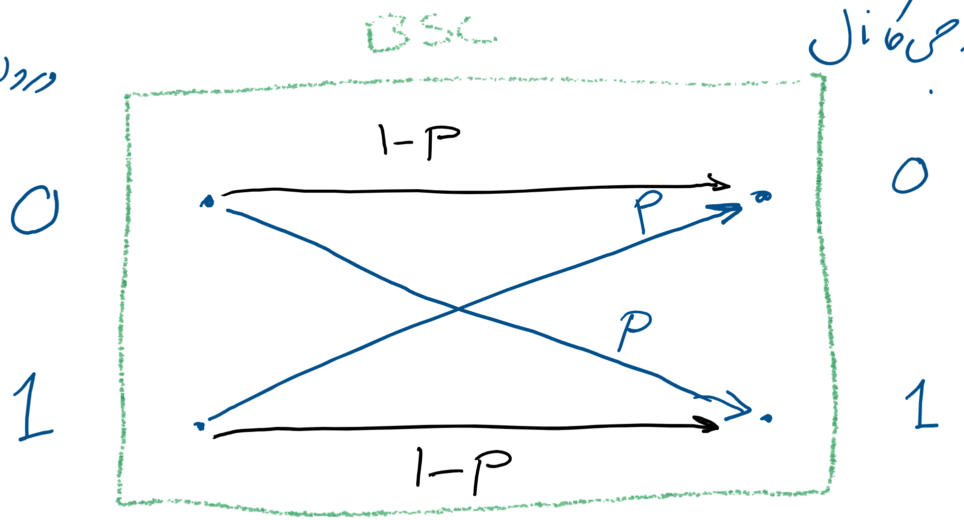
Transmitter (TX) فرستنده

احتمالات اولیه

ورودی کانال

خروجی کانال

گیرنده (RX) Receiver



P_0

$1-P_0$

پیش آمد آنکه بیت '0' فرستاده شده باشد : T_0

پیش آمد 〃 〃 '1' 〃 〃 〃 : T_1

پیش آمد آنکه بیت '0' دریافت شده باشد : R_0

پیش آمد 〃 〃 '1' 〃 〃 〃 : R_1

به این ترتیب با توجه به مدل کانال BSC داریم

$$P(T_0) = P_0$$

$$P(T_1) = 1 - P_0$$

$$P(R_0 | T_0) = 1 - P$$

$$P(R_0 | T_1) = P$$

$$P(R_1 | T_0) = P$$

$$P(R_1 | T_1) = 1 - P$$

در این مسئله می‌خواهیم

۱- احتمال خطای کانال را محاسبه کنیم.

2- می‌خواهیم بدانیم اگر در گیرنده بیت '0' دریافت شده باشد، احتمال اینکه فرستنده واقعاً بیت '0' را فرستاده است، چقدر است.

- احتمال خطای کانال

برای محاسبه‌ی احتمال خطا، لازم است ابتدا پیش‌آمد خطا را برای خودمان مشخص کنیم.

پیش‌آمد خطا (E) : اینکه بیت '0' ارسال شود و بیت '1' دریافت شود یا

بیت '1' ارسال شود و بیت '0' دریافت شود.

$$E = (T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)$$

$$\Rightarrow \overbrace{P(E)}^{P_e} = P(T_0 \cap R_1) + P(T_1 \cap R_0)$$

$$= \underbrace{P(T_0)}_{P_0} \underbrace{P(R_1 | T_0)}_{P} + \underbrace{P(T_1)}_{1-P_0} \underbrace{P(R_0 | T_1)}_{P}$$

$$= P_0 P + (1 - P_0) P = P(1 - P_0 + P_0) = P$$

2- اگر در گیرنده بیت '0' را دریافت کنیم، احتمال اینکه فرستنده بیت '0' را فرستاده باشد، چقدر است؟

$$\underbrace{P(T_0 \mid R_0)}_{\text{احتمال پسین یا پس از مشاهده}} = ?$$

$$P(T_0 \mid R_0) = \frac{P(R_0 \mid T_0)\,P(T_0)}{P(R_0)} = \frac{(1-P)\,P_0}{P(R_0)}$$

$$P(R_0) = \overbrace{P(T_0)\,P(R_0 \mid T_0)}^{P(R_0 \cap T_0)} + \overbrace{P(T_1)\,P(R_0 \mid T_1)}^{P(R_0 \cap T_1)} = P_0(1-P) + (1-P_0)P$$

قضیه احتمال کلی

احتمال اینکه '0' فرستاده شود و '0' دریافت شود

احتمال اینکه '1' فرستاده شود و '0' دریافت شود

$$\Rightarrow \quad P(T_0 \mid R_0) = \frac{(1-P)\,P_0}{P_0(1-P) + (1-P_0)\,P}$$

$P(T_1 \mid R_0)$, $P(T_1 \mid R_1)$, $P(T_0 \mid R_1)$

* به عنوان تمرین احتمالات
را محاسبه کنید.

$$\left.\begin{array}{l} P(T_0 \mid R_0) \\ P(T_1 \mid R_0) \\ P(T_0 \mid R_1) \\ P(T_1 \mid R_1) \end{array}\right\}$$

احتمالات
پسین

$\longrightarrow \quad P(T_0 \mid R_0) + P(T_1 \mid R_0) = 1$

$\longrightarrow \quad P(T_0 \mid R_1) + P(T_1 \mid R_1) = 1$

* یکی از کاربردهای احتمالات بیزین، استفاده از این احتمالات در بازیابی اطلاعات ارسالی روی کانال است که به این روش، روش آشکارسازی (بازیابی اطلاعات) MAP گفته می‌شود

Maximum Aposteriori Probability

$$P(T_0 | R_0) \underset{T_1}{\overset{T_0}{\gtrless}} P(T_1 | R_0)$$

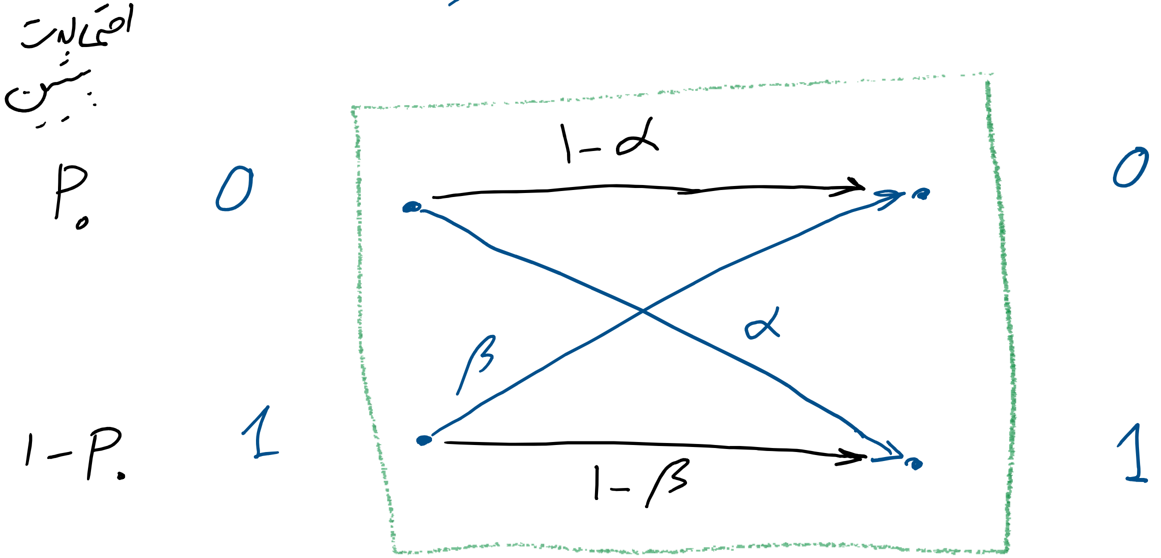
به شرط مشاهده R_0

* به عنوان تمرین مسئله قبل را به ازای $P_0 = \frac{1}{2}$ و $P = 10^{-4}$ حل کنید.

* تمرین: مسئله قبل را در حالتی که کانال باینری نامتقارن باشد، حل کنید.

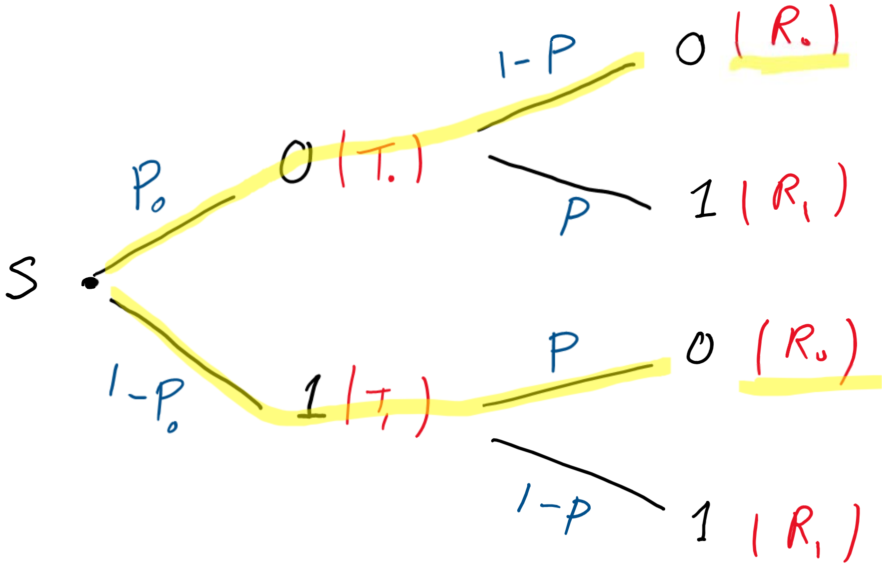
- احتمال خطای کانال؟

- احتمالات پسین؟



$\alpha \neq \beta$

این گونه مسائل را می توانیم با کمک نمودارهای درختی نیز حل کنیم



(قضیه احتمال کل)

$$P(R_0) = ?$$

$$P(R_0) = P_0(1-P) + (1-P_0)P$$

مثال : سه سکه C_1 ، C_2 و C_3 در اختیار داریم. هر دو طرف سکه C_1 ، خط است و هر دو طرف سکه C_2 شیر است و سکه C_3 سالم است (یعنی یک طرف آن شیر و طرف دیگر آن خط است). یکی از این سه سکه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر شیر مشاهده شود، احتمال اینکه سکه سالم را انتخاب کرده باشیم، چقدر است؟

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$$ ، احتمالات پیشین

$$P(C_3 \mid H) = ?$$ احتمال پسین $\longrightarrow$ قانون بیز

$$P(C_3 \mid H) = \frac{P(H \mid C_3)\, P(C_3)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{P(H)}$$

$$P(H) = P(C_1)\, P(H \mid C_1) + P(C_2)\, P(H \mid C_2) + P(C_3)\, P(H \mid C_3)$$

قضیه احتمال کل

$$\Longrightarrow P(H) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \; \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow P(C_3 \mid H) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

به عنوان تمرین، احتمالات زیر را برای مسئله قبل محاسبه کنید

$$P(C_1 \mid H) = 0$$

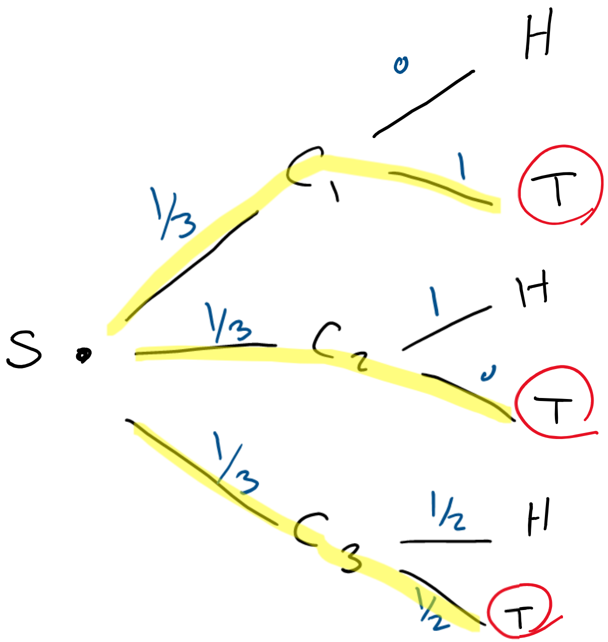
$$P(C_2 \mid H) = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

$$P(C_3 \mid H) = \frac{1}{3}$$

$$P(C_1 \mid T)$$

$$P(C_2 \mid T) = 0$$

$$P(C_3 \mid T)$$



(قضیه احتمال کل)

$$P(T) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$P(T) = \frac{1}{2}$$

در ادامه می خواهیم مفهوم استقلال پیشامدها را معرفی کنیم.

* مفهوم استقلال در پیشامد A و B

در پیشامد A و B را مستقل از هم می گوییم اگر مطلع بودن کلی از این پیشامدها، هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد. با بیان ریاضی یعنی اگر

1

$$P(B|A) = P(B) \quad , \quad P(A|B) = P(A)$$

آنگاه A و B مستقل از هم هستند

نماد استقلال

$$A \perp\!\!\!\perp B$$

Independency

از طرف دیگر با توجه به رابطه‌ی زنجیره‌ای می‌دانیم که

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \xRightarrow{(1)} \begin{array}{l} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{array}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \qquad (2)$$

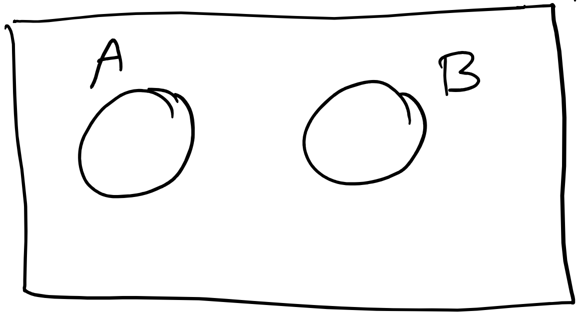
رابطه (2) نتیجه‌ی رابطه (1) را می‌توان گفت

- احتمال اشتراک دو پیشامد مستقل از هم، برابر حاصلضرب احتمالات تک تک آنها است.

- دو پیشامد مستقل (با احتمالات غیر صفر) حتماً با هم اشتراک دارند زیرا

$$P(A \cap B) \neq 0$$

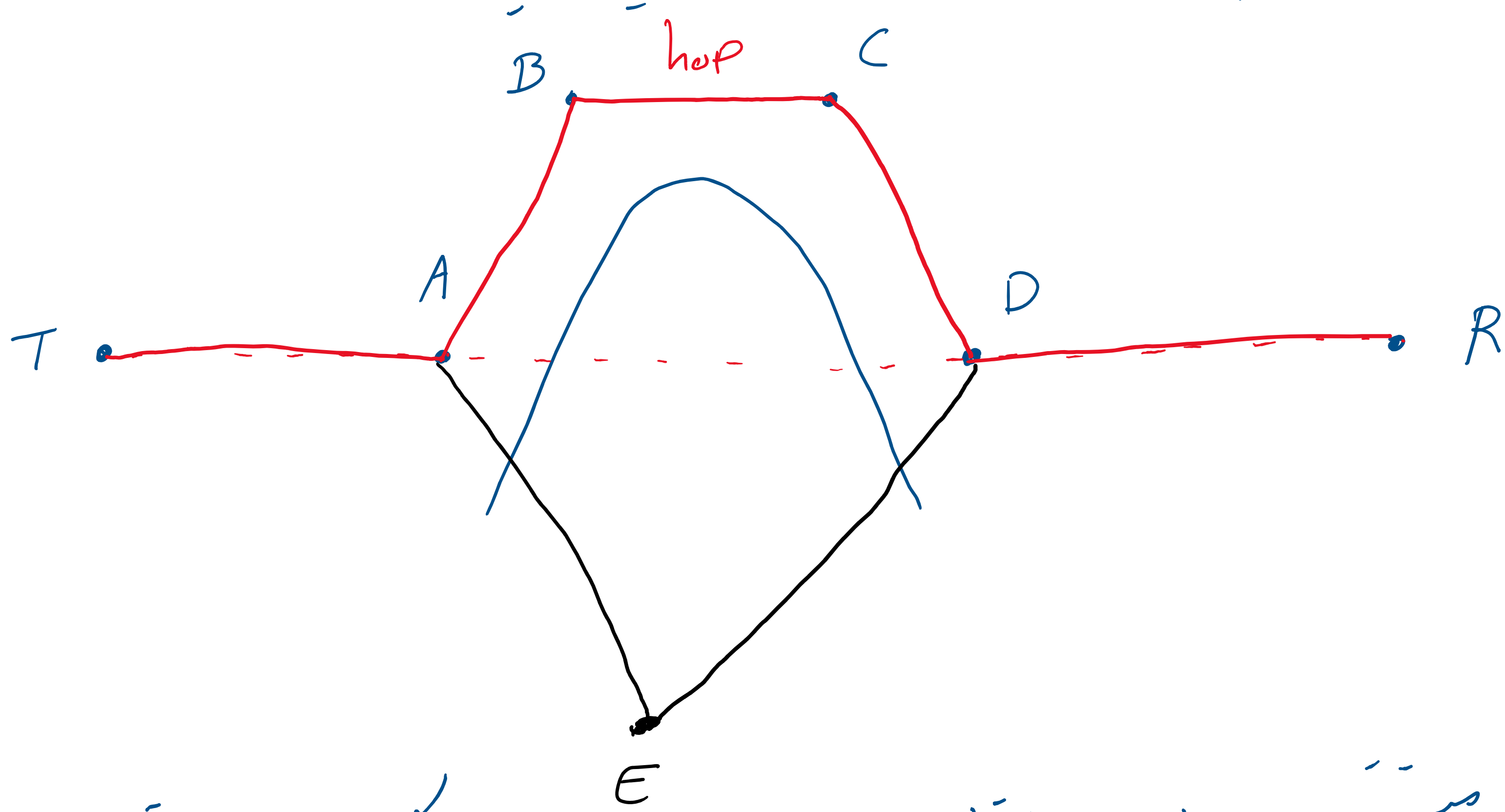
✓ A , B دو پیش آمد جدا از هم ، $A \cap B = \varphi$ یا $P(A \cap B) = 0$



$\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \quad \times}$

← "جدا از هم بودن دو پیش آمد A , B " را با "استقلال دو پیش آمد" اشتباه نکنیم.

مثال - می خواهیم بین دو نقطه T و R یک لینک مخابراتی برقرار کنیم.



به دلیل نبود دید مستقیم بین این دو نقطه اطلاعات از طریق ایستگاه های مخابراتی A ، B ، C و D از T به R می فرستیم (رله می کنیم). برای اینکه قابلیت اطمینان ارتباط را بالا ببریم، یک

مسیر پشتیبان (stand by) نیز برای این لینک می‌توان از طریق ایستگاه کاری E
در نظر می‌گیریم. احتمال برقراری لینک بین T و R را حساب کنید.

بر اساس احتمال سالم بودن ایستگاه‌های کاری A ، B ، C ، D و E این احتمال را
محاسبه کنید. عملکرد این ایستگاه‌ها مستقل از هم است.

احتمال سالم بودن ایستگاه‌ها برابر P_A ، P_B ، P_C ، P_D و P_E است.

* احتمال اینکه لینک بین T و R برقرار باشد؟

پیش‌آمد اینکه لینک بین T و R برقرار باشند $\equiv$ A و D سالم باشند و (B و C سالم باشند
یا E سالم باشند)

$$L = (A \cap D) \cap [(B \cap C) \cup E]$$

پیش آمد برقراری لینک

پیش آمد سالم بودن A

سالم بودن D

سالم بودن B

سالم بودن C

سالم بودن E

$$\Rightarrow P_L = P_r\{(A \cap D) \cap [(B \cap C) \cup E]\}$$

$$= P_r\{(A \cap D \cap B \cap C) \cup (A \cap D \cap E)\}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\Longrightarrow P_L = P(A \cap D \cap B \cap C) + P(A \cap D \cap E) - P(A \cap B \cap C \cap D \cap E)$$

$$= P_A P_B P_C P_D + P_A P_D P_E - P_A P_B P_C P_D P_E$$

استقلال پیشامدها

$$= P_A P_D \left(P_B P_C + P_E - P_B P_C P_E \right)$$

مفهوم استقلال را می‌توان به بیشتر از دو پیشامد نیز تعمیم داد.

پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n را توأماً مستقل گر هر زیر مجموعه از این پیشامدها به هر مقدار در نظر بگیریم، مستقل از هم باشند. (یعنی تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی مستقل از هم، تمام زیر مجموعه‌های سه عضوی مستقل از هم و ......) یا با بیان ریاضی داشته باشیم

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_r})$$

$$\forall i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$$

یا: $$P\left(\prod_{j=1}^{r} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{i_j}) \qquad r \in \{2, 3, \dots, n\}$$

$\cup \equiv +$ $\quad$ $\cap \equiv \cdot$

در این صورت پیشامدهای A_1 , A_2 , ... , A_n را تواماً مستقل می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم

$$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \perp\!\!\!\perp A_3 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp A_n$$

در مورد استقلال پیشامدها، دو قضیه زیر کمک کننده هستند.

قضیه ۱ : اگر دو پیشامد A , B مستقل از هم باشند، آنگاه پیشامدهای A , B^c نیز مستقل از هم هستند.

$P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

اثبات : به عنوان تمرین ثابت کنید

راهنمایی : نشان دهید که یکی از روابط ① و ② برقرار است

$$P(A|B^c) = P(A) \quad , \quad P(B^c|A) = P(B^c) \quad ①$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) \quad ②$$

قضیه 2: اگر A و B مستقل از هم باشند A^c و B^c نیز مستقل از هم هستند.

(نتیجه‌ای از قضیه 1) قضیه 1 را برای A و B^c تکرار کنید

تمرین: اگر $A \perp\!\!\!\perp B$ و $A \perp\!\!\!\perp C$ برقرار باشند، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با استدلال مناسب مشخص کنید

1) $A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$

2) $A \perp\!\!\!\perp (B \cap C)$

3) $B \perp\!\!\!\perp C$

4) $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C$