به نام خدا

احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

همان طور که دیدیم، سه اصل اساسی احتمال در مورد تابع احتمال شرطی نیز برقرار است. بنابراین $P(A|B)$ یک تابع احتمال است و تمامی خصوصیات و قضیه هایی که در مورد تابع احتمال بیان کردیم در مورد تابع احتمال شرطی نیز برقرار است. فقط باید توجه داشته باشیم که شرط را همواره در نظر بگیریم.

به عنوان مثال:

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

در ادامه می خواهیم کلی از روابط پرکاربرد در بحث احتمال را معرفی کنیم که با کمک آنها احتمال شرطی به دست می آید.

* روابط زنجیره ای

می دانیم که:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

به طریق مشابه می‌توان نوشت

$$\begin{cases} P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \implies P(A\cap B) = P(B|A)\,P(A) \quad (1) \\[2em] P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \implies P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B) \quad (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \implies P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

روابط زنجیره‌ای

ضرب زنجیره‌ای را می‌توانیم به بیشتر از دو پیشامد نیز تعمیم دهیم.

$$\underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}_{P(A_1, A_2 \dots A_n)} = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_2, A_1) \dots P(A_n \mid A_{n-1}, \dots, A_1)$$

$$= P(A_n)\, P(A_{n-1} \mid A_n)\, P(A_{n-2} \mid A_n, A_{n-1}) \dots P(A_1 \mid A_{n-1}, \dots, A_2)$$

$$\xRightarrow{\text{به طور خلاصه}} P(A_1, A_2 \dots A_n) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P(A_i \mid A_{i-1}, \dots, A_1)$$

مثال ۱ - یک تاس را پرتاب می کنیم ، احتمال این پیش آمد را حساب کنید که عدد حاصل کمتر از 4 باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه آزمایش یک عدد زوج بوده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

A : پیش آمد آنکه عدد حاصل کمتر از 4 باشد $\quad A = \{1, 2, 3\}$

B : پیش آمد آنکه نتیجه آزمایش یک عدد زوج باشد $\quad B = \{2, 4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{1}{3}$$

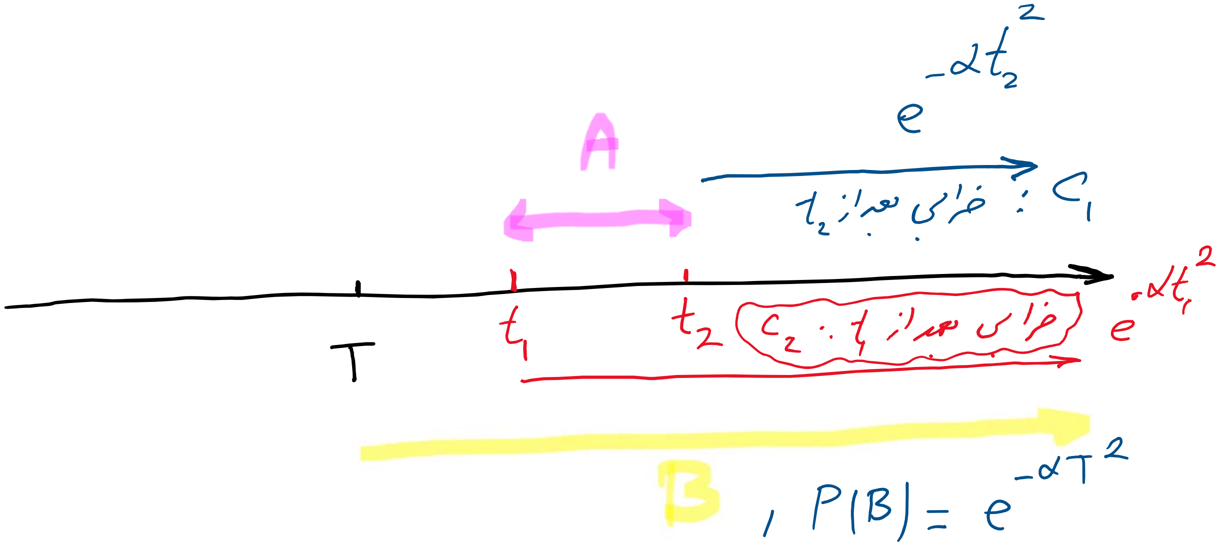
مثال 2 : فرض کنید دیودی داریم که احتمال خرابی آن بعد از مدت زمان t برابر $e^{-\alpha t^2}$ است.
اگر بدانیم این دیود تا زمان T سالم بوده است، احتمال این پیش آمد را حساب کنید که خرابی دیود در بازه زمانی t_1 تا t_2 رخ داده باشد. (با فرض $t_1, t_2 > T$, $t_1 < t_2$)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B : پیش آمد اینکه دیود تا زمان T سالم بوده است یا به طور معادل یعنی خرابی دیود بعد از T رخ داده

A : پیش آمد اینکه خرابی دیود در بازه زمانی t_1 تا t_2 رخ داده باشد.

$$\Rightarrow \quad P(B) = e^{-\alpha T^2}$$



در نتیجه $A \cap B = A$

با توجه به بازه‌های زمانی داده شده در مسئله داریم

$$P(A \cap B) = P(A) = P(C_2 - C_1) \underset{C_1 \subset C_2}{=} P(C_2) - P(C_1) = e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}}{e^{-\alpha T^2}}$$

مثال 3: مسابقه‌ای ترتیب داده شده است که در آن خانواده‌هایی می‌توانند شرکت کنند که دست‌کم یک فرزند پسر داشته باشند. اگر خانواده X در این مسابقه شرکت کرده باشند و بدانیم که دو فرزند دارند، احتمال این پیش‌آمد را حساب کنید که هر دو فرزند خانواده X پسر باشند.

A: پیش‌آمد اینکه هر دو فرزند خانواده X پسر باشند $A=\{(b,b)\}$

B: پیش‌آمد اینکه خانواده X دو فرزند داشته باشند که دست‌کم یکی از آنها پسر باشد

$B=\{(b,g),(g,b),(b,b)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$\Omega = \{(g,g), (g,b), (b,g), (b,b)\}$$

$$P(A|B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B} = \frac{1}{3}$$

مثال: در جعبه‌ای 6 توپ قرمز و 4 توپ سفید وجود دارد. دو توپ را به صورت تصادفی و بدون جایگزینی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند را محاسبه کنید.

راه حل اول: استفاده از آنالیز ترکیبی

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{5\times 6}{2}\times 1}{\frac{9\times 10}{2}} = \frac{5\times 6}{9\times 10} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم: با کمک رابطه زنجیره‌ای (کاربرد رابطه زنجیره‌ای در حل مسئله‌ها)

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

پیشامد مورد نظر ما: اینکه هر دو توپ قرمز باشند

$$\underbrace{R_1}_{\text{توپ اول قرمز}} \cap \underbrace{R_2}_{\text{توپ دوم قرمز باشد}}$$

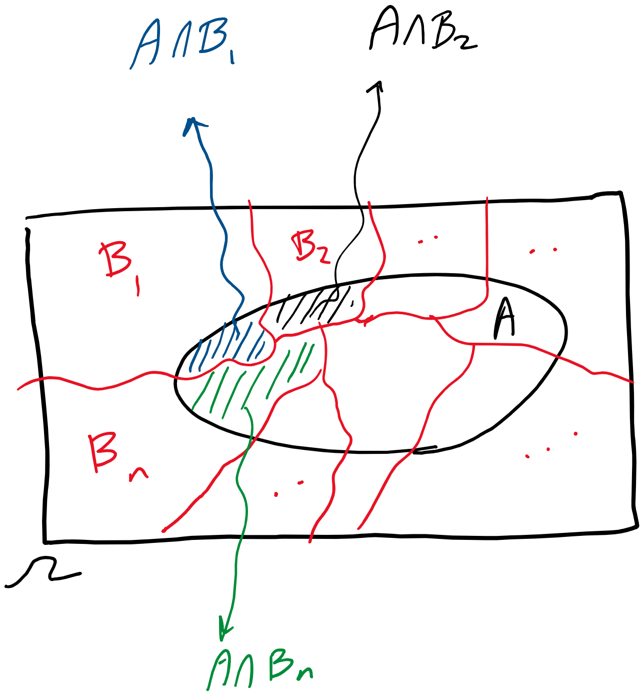
$$P(R_1 \cap R_2) = \underbrace{P(R_1)}_{\text{توپ اول قرمز باشد}}\ \underbrace{P(R_2|R_1)}_{\text{توپ دوم قرمز باشد، بشرط اینکه بدانیم توپ اول هم قرمز بوده است.}}$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

در ادامه می‌خواهیم دو رابطه پرکاربرد دیگر که در حل مسائل بسیار کمک کننده هستند را معرفی کنیم.

* قضیه احتمال کل و فرمول Bayes

الف) قضیه احتمال کل



$$P(A) = ?$$

هدف ما محاسبه‌ی احتمال پیش آمد A است که از عوامل متعددی در فضای احتمال تاثیر می‌پذیرد.

اگر این عوامل را با $B_1, B_2, \ldots, B_n$ نمایش دهیم و یک افراز $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ روی مجموعه Ω باشند. در این صورت احتمال هر پیشامد دلخواه مانند A را در این فضا می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$$

اثبات: می‌دانیم

$$A = A \cap \Omega = A \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)}_{\text{یا } \sum_{i=1}^{n} B_i} \underset{\text{توزیع پذیری اشتراک روی اجتماع}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i)$$

مجموعه های جدا از هم

از ضرب زنجیره ای

$$\forall i \neq j \;;\; (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \varphi$$

$$B_i \cap B_j = \varphi$$

قضیه احتمال کل

پیشامدهای ساده تر

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{P(B_i)}\,\overbrace{P(A|B_i)}$$

مثال: دو جعبه حاوی ترانزیستور در اختیار داریم. در یک جعبه 2 ترانزیستور خراب و 8 ترانزیستور سالم وجود دارد. در جعبه ی دوم 9 ترانزیستور خراب و 6 ترانزیستور سالم وجود دارد. یک جعبه را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم و یک ترانزیستور را به طور تصادفی از آن جعبه انتخاب می کنیم. احتمال این را حساب کنید که ترانزیستور انتخاب شده، خراب باشد.

B_1 : ترانزیستور از جعبه اول انتخاب شود

B_2 : ترانزیستور از جعبه دوم انتخاب شود

پیشامد اینکه ترانزیستور خراب باشد

حل با کمک قضیه احتمال کلی

احتمال اینکه جعبه اول انتخاب شود

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)$$

احتمال اینکه ترانزیستور انتخاب شده از جعبه اول خراب باشد

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{15}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}\,\frac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}} + \frac{1}{2}\,\frac{\binom{9}{1}}{\binom{15}{1}}$$ با

* اگر ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد، احتمال این را حساب کنید که از جعبه دوم انتخاب شده باشد.

$$P(B_2 \mid A) = ?$$

جعبه دوم انتخاب شده باشد

ترانزیستور خراب است — می‌دانیم

در این گونه سوال‌ها می‌توانیم از فرمول Bayes کمک بگیریم.

برای محاسبه احتمال چنین پیش آمدهایی که به آنها احتمالات پیشین یا پسین از مشاهده می گوییم، می توانیم از فرمول بیز کمک بگیریم.

می دانیم

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\underbrace{P(A)}}$$

رابطه زنجیره ای

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)\,P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Bayes فرمول

قضیه احتمال کلی

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)\,P(A|B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)\,P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A|B_i)}$$

احتمالات پسین یا پس از مشاهده

Aposteriori Probability

احتمالات پیشین یا پیش از مشاهده

Apriori Probability

* با کمک فرمول بیز قسمت دوم مثال را حل می کنیم.

- اگر ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد، احتمال اینکه از جعبه دوم انتخاب شده باشد را بدست بیاورید.

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)\,P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{9}{15}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{15}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

احتمال خراب بودن ترانزیستور

$$P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{10} + \frac{1}{2}\times\frac{9}{15}$$

قضیه احتمال کلی

$$P(B_2) = \frac{1}{2}$$ پیش از مشاهده

$$P(B_2|A) = \frac{3}{4}$$ پس از مشاهده

$$P(B_1|A) = 1 - P(B_2|A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(چون B_1 و B_2 مکمل یکدیگر هستند. افرازدوتایی از Ω هستند)

تمرین: مثال قبل را با فرض سالم بودن ترانزیستور، تکرار کنید.

مثال 2: کانال های متقارن باینری

یکی از کانال هایی که به طور گسترده ای برای مدل سازی انتقال اطلاعات باینری (یعنی دو حالت مثلاً 1,0) استفاده می شود، کانال متقارن باینری است. در این کانال به علت خرابی هایی که ممکن است در محیط انتقال رخ دهد، سیگنال فرستاده شده در گیرنده با خطا دریافت می شود.

در کانال های باینری متقارن، این خطا را با P نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر احتمال آنکه
فرستنده بیت "0" را بفرستد ولی در گیرنده بیت "1" دریافت شود (و برعکس) برابر P
است.