به نام خدا

- تابع احتمال

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالت‌های مورد نظر در رخداد پیش آمده

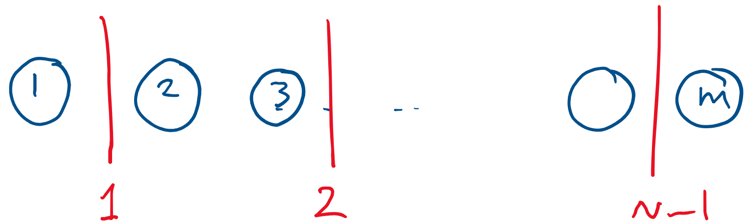
N : کل تعداد حالت‌های ممکن

برای محاسبه ی N_A و N از آنالیز ترکیبی کمک می گیریم.

مروری بر آنالیز ترکیبی

- جایگشت
-
- ترکیب

* اگر بخواهیم m شی را در n جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه دست کم یک شی، وجود داشته باشد (هیچ جعبه‌ای خالی نباشد) بنابراین شرط $m \geq n$ در این مسئله باید برقرار باشد.



در این مسئله، جزءهای ناصفرها، باید بین m شی قرار بگیرند. یعنی می‌توانند در $m-1$ مکان قرار بگیرند. بنابراین دسته‌بندی این m شی به N دسته به طوری که در هر دسته دست کم یک شی وجود داشته باشد، معادل انتخاب $N-1$ مکان از بین $m-1$ مکان ممکن است. بنابراین تعداد حالت‌ها برابر خواهد بود با

$$\binom{m-1}{N-1} = C_{N-1}^{m-1}$$

مثال - معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_N = m$ با شرط $m \geq N$ را درنظر بگیریم.

اگر $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی) باشند، تعداد جواب های این معادله چقدر است؟

$$1 \quad 1 \;\Big|\; 1 \;\Big|\; \cdots\cdots \; 1 \;\Big|\; 1$$

$$x_1 \qquad x_2 \qquad\qquad\qquad x_N$$

تعداد جواب های معادله $= \binom{m-1}{N-1}$

مثال عددی - معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح مثبت دارد؟

$$\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

* همان طور که به یاد داریم، از ترکیب در بسط دو جمله‌ای نیز استفاده می‌شود

$$(x+y)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i y^{N-i} \qquad (*)$$

- با کمک بسط دو جمله‌ای می‌توان نشان داد که

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

اثبات: در رابطه‌ی $(*)$ به جای x و y عدد 1 را قرار دهید.

$$x = y = 1 \xrightarrow{(*)} 2^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}$$

مثال: کل تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه N عضوی چقدر است؟

$$\underbrace{\binom{N}{0}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی}} + \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی}} + \underbrace{\binom{N}{2}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{N}{N}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } N \text{ عضوی}} = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

مثال: کل تعداد بردارهای باینری به طول N چقدر است؟

بردار باینری، برداری است که المان‌های آن فقط 0 و 1 هستند. به طور مثال بردار $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ یک بردار باینری به طول 4 است.

1	2	3	...	N
___	___	___	...	___
1 یا 0	1 یا 0			1 یا 0
2 حالت	2 حالت			2 حالت

$\Longrightarrow$ کل تعداد حالات ممکن $= 2^N$ (راه حل اول)

(راه حل دوم)

$$\underbrace{\binom{N}{0}}_{\text{تعداد بردارهایی به طول N که هیچ المان آنها 1 نباشد}} + \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{تعداد بردارهایی که یک المان آن برابر 1 باشد}} + \cdots + \underbrace{\binom{N}{N}}_{\text{تعداد بردارهایی که N المان آن برابر 1 باشند}} = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

$\binom{N}{m}$: تعداد بردارهای باینری به طول N که m المان آن برابر 1 باشد

(این بردار معادل $N-m$ المان آن برابر 0 باشد)

$$\binom{N}{m} = \binom{N}{N-m}$$

* در آنالیز ترکیبی، با مفهوم ترکیب تعمیم یافته نیز آشنا هستیم. به این صورت که اگر N شیء داشته باشیم که m_1 تای آنها شبیه هم، m_2 تای آنها شبیه هم، ... و m_r تای آنها شبیه هم باشند و

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = N$$

به عنوان مثال 20 توپ داریم که 7 تای آنها سفید، 8 تای آنها قرمز و 5 تای آن آبی هستند.

یا به بیان دیگر r دسته داریم که تعداد اعضای هرکدام برابر m_i است، $i = 1, 2, \dots, r$

و

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = N$$

تعداد حالات چینش این N شی با یک ترکیب تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r} = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \dots m_r!}$$

به طور معادل، این مسئله معادل دسته‌بندی کردن N شیء به r دسته است به طوری که در دسته i ام، m_i شیء وجود داشته باشد (ترتیب مهم نباشد)

* با این مفهوم در بسط چندجمله‌ای ها نیز آشنا بوده‌ایم

$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^N = \sum_{\substack{m_1,m_2,\dots,m_r\\ \sum_{i=1}^{r} m_i = N}} \binom{N}{m_1,m_2,\dots,m_r} x_1^{m_1} x_2^{m_2}\cdots x_r^{m_r}$$

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2y^0z^0 + \binom{2}{2,0,0}y^2x^0z^0 + \binom{2}{2,0,0}z^2y^0x^0 + \binom{2}{1,1,0}xyz^0 + \binom{2}{1,1,0}xy^0z + \binom{2}{1,1,0}x^0yz$$

برای یادآوری بسط چندجمله‌ای $(x+y+z)^3$ را به دست بیاورید.

در ادامه می‌خواهیم چند مثال برای محاسبه‌ی احتمال را بررسی کنیم

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

مثال ۱ - یک سکه را 5 بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این پیشامد را حساب کنید که حداکثر 3 بار شیر بیاید.

A: حداکثر 3 بار شیر بیاید (صفر بار شیر بیاید یا یک بار یا دو بار یا سه بار)

آزمایش پرتاب سکه ← تعداد حالت ها

$$\{H, T\}$$

پنج بار پرتاب سکه ← تعداد حالت ها

$$N = 2^5$$

1	2	3	4	5
2 حالت H, T	2 حالت H, T			2 حالت H, T

$$\Rightarrow \quad N = 2^5$$

تعداد حالت‌هایی که حداکثر 3 بار شیر بیاید

$$N_A = \underbrace{\binom{5}{0}}_{\text{تعداد حالت‌هایی که صفر بار شیر بیاید}} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک بار شیر بیاید}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو بار شیر بیاید}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه بار شیر بیاید}}$$

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3}}{2^5}$$

این مسئله را می‌توان با کمک پیش‌آمد مکمل A نیز حل کرد.

A^c : پیش‌آمد اینکه دست کم 4 بار شیر بیاید

$$N_{A^c} = \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$\Rightarrow P(A^c) = \frac{N_{A^c}}{N} = \frac{\binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{2^5} = \frac{5+1}{2^5} = \frac{6}{32}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

مثال ۲ - می خواهیم m توپ را به طور تصادفی در n جعبه قرار دهیم. شرط $n \geq m$ برقرار است. احتمال این پیشامد را حساب کنید که این m توپ در m جعبه مورد نظر ما قرار بگیرند (در هر جعبه یک توپ) یعنی ما از قبل m جعبه را به عنوان جعبه های مورد نظر در ذهن مان انتخاب کرده ایم.

N_A : تعداد حالت های مورد نظر

N : کل تعداد حالت های ممکن

$$N_A = 1$$

$$N = \binom{n}{m}$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

مثال 3 . در مثال قبل اگر توپ ها شبیه هم نباشند، جواب مسئله چه تغییری می کند.

N_A : تعداد حالت های مورد نظر

N : کل تعداد حالات های ممکن

$$N_A = m!$$

$$N = P_m^n$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{m!}{P_m} = \frac{m!}{\frac{n!}{(n-m)!}} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

مثال ۲- در یک جعبه 60 توپ آبی و 40 توپ سفید داریم. 20 توپ را به صورت تصادفی از جعبه خارج می‌کنیم (بدون جایگزینی) احتمال این را حساب کنید که از این 20 توپ، 10 توپ آبی و 10 توپ سفید باشد.

N_A : تعداد حالت‌های ممکن $\quad \binom{60}{10}\binom{40}{10}$

N : کل تعداد حالت‌ها $\quad \binom{100}{20}$

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{\binom{60}{10}\binom{40}{10}}{\binom{100}{20}}$$

مثال 5 . در مثال قبل اگر ترتیب ها مشابه هم نباشند، جواب مسئله چه تغییری می کند؟

$$N_A : \binom{40}{10}\binom{60}{10} 20!$$

$$N : P_{20}^{100}$$

$$\longrightarrow P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10} 20!}{P_{20}^{100}}$$

$$P_{20}^{100} \rightarrow \frac{100!}{80!}$$

---

4 حالت   6 حالت   3 حالت   2 حالت

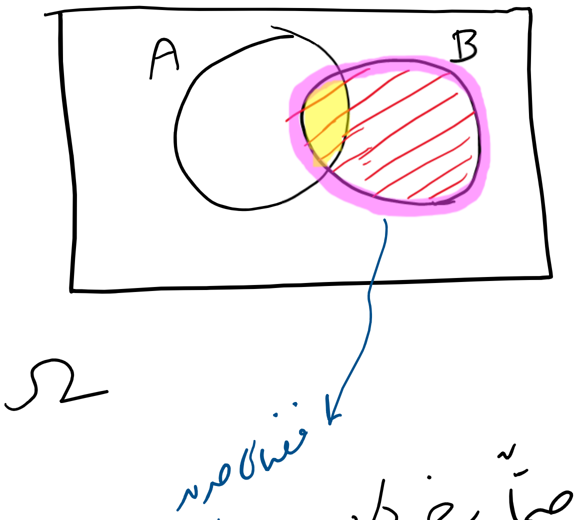
$$4 \times 6 \times 3 \times 2$$

در ادامه می خواهیم مفهوم احتمال شرطی را بررسی کنیم

* احتمال شرطی　Conditional Probability

احتمال شرطی پیش آمد A به شرط اینکه پیش آمد B حتماً رخ داده باشد را با $P(A|B)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

در واقع در تعریف تابع احتمال شرطی، با توجه به اینکه می‌دانیم B حتماً رخ داده (B یک قطعی است)، فضای احتمال را به پیشامد B نرمالیزه می‌کنیم. با کمک این نرمال‌سازی تابع احتمال شرطی $P(A|B)$ را تعریف کرده‌ایم. در ادامه نشان می‌دهیم که $P(A|B)$ نیز یک تابع احتمال است یعنی سه اصل اساسی تابع احتمال برای $P(A|B)$ نیز برقرار است و $P(A|B)$ یک

تابع احتمال است و تمام مواردی که برای تابع احتمال بیان کردیم برای $P(A|B)$ نیز برقرار است

با این تفاوت که باید همیشه شرط را نیز در نظر بگیریم (به عبارت دیگر قطعی بودن رخداد B را همواره در نظر داشته باشیم)

اصل 1 : $\forall A \subset \Omega \; ; \; P(A|B) \geq 0$

اثبات :

$$\forall A \subset \Omega \; ; \; P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{> 0}} \Longrightarrow P(A|B) \geq 0$$

اصل 2 :
$$P(\Omega \mid B) = 1$$

اثبات :
$$P(\Omega / B) = \frac{P(\overbrace{\Omega \cap B}^{B})}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

اصل 3 :
$$A \cap C = \phi \quad ; \quad P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$$

اثبات :
$$P(A \cup C / B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)}$$

$$A \cap B \cap C = \phi$$

$$\Rightarrow P(A\cup C|B) = \underbrace{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}_{P(A|B)} + \underbrace{\frac{P(C\cap B)}{P(B)}}_{P(C|B)}$$

$$\Rightarrow P(A\cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) \quad \checkmark$$

⇐ سه اصل اساسی احتمال برقرار است ، $P(A|B)$ یک تابع احتمال است.