به نام خدا

براساس مقدماتی که بیان کردیم، می خواهیم به یک احتمال بپردازیم. هدف ما در این بخش این است که با توجه به آزمایش تصادفی و پیش آمد مورد نظر، بتوانیم یک عدد (کمیت) را به عنوان احتمال به پیش آمد مورد نظر نسبت بدهیم. برای بیان تحلیلی این موضوع، فضای احتمال را معرفی می کنیم.

* فضای احتمال Probability Space

فضای احتمال از عناصر زیر تشکیل شده است،

۱- فضای نمونه یا Ω (به عنوان مجموعه ای از تمامی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی)

2- یک زیرمجموعه از Ω که به آن پیشامد می گوییم و با E نمایش می دهیم.

3- یک عدد (تابع) که نشان دهنده ی احتمال پیشامد مورد نظر است و آن را با P نمایش می دهیم.

(اگر میدان F شامل تمام پیشامدهای احتمال پذیر زیرمجموعه Ω

$$\text{فضای احتمال} = (\Omega, E, P) \quad \text{یا} \quad (\Omega, E, P(E))$$

تابع احتمال

$$P \equiv P(E) \equiv P_r\{E\} \equiv P_E$$

نوتاسیون های هم ارز

در فضای احتمال ، با مفاهیم فضای نمونه و پیشامد ، در جلسه‌ی قبل آشنا شدیم. در اینجا می‌خواهیم

مفهوم احتمال (یا تابع احتمال) را معرفی کنیم. (در ارتباط با یک پیشامد مورد نظر E)

برای این منظور لازم است با برخی مفاهیم و اصول پایه‌ای احتمال آشنا شویم.

* اگر پیشامدی غیرممکن باشد (یعنی هیچ‌گاه رخ ندهد) احتمال آن برابر صفر است.

به عنوان مثال مجموعه‌ی $\{\ \}$ یا $\varnothing$ یک پیشامد غیرممکن است و احتمال آن برابر صفر است.

* پیشامد حتمی ، پیشامدی است که احتمال آن برابر 1 است و آزمایش تصادفی حتماً به یکی از

عناصر این مجموعه (پیشامد) منجر می‌شود. فضای نمونه Ω یک پیشامد حتمی است.

* در مجموعه‌ی A و B را جدا از هم می‌گوییم اگر داشته باشیم.

$$A \cap B = \phi$$

یعنی پیشامدهای A و B هیچگاه باهم رخ نمی‌دهند. را احتمال پیشامد $A \cap B$ برابر صفر است یا پیشامد $A \cap B$ یک پیشامد غیرممکن است)

برپایه‌ی این مفاهیم، می‌خواهیم تابع احتمال را برای هر پیشامد دلخواه E را $P(E)$ تعریف کنیم. این تابع دارای شرایط زیر است (اصول بدیهی احتمال)

۱ـ احتمال هر پیشامد دلخواهی یک عدد غیرمنفی است.

$$\forall E \subset \Omega \; ; \quad P_r\{E\} \equiv P(E) \geq 0$$

۲- همواره داریم

$$P(\Omega) = 1$$

۳- اگر پیشامدهای $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ دو به دو جدا از هم باشند، یعنی

$$\forall i \neq j \; ; \quad A_i \cap A_j = \phi \qquad i , j \in \{1, 2, \dots , n\}$$

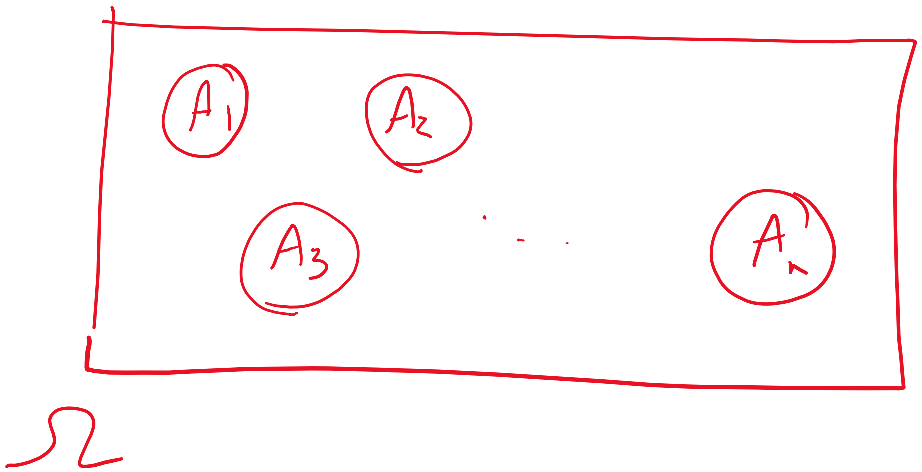
در این صورت داریم:

$$P_r\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P_r\{A_i\}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

یا

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$



Borel-Field یا σ-Field

* تعاریف بالا مربوط به فضاهای جبری هستند که آنها را
(روی میدان تعریف می‌شوند)
می‌نامیم و در این درس به جزئیات آن نمی‌پردازیم.

براساس اصول سه گانه بیان شده و با کمک قضیه هایی که در ادامه مطرح خواهیم کرد، خصوصیات بیشتری را درمورد تابع احتمال بیان خواهیم کرد و می توانیم به هر پیشامد دلخواه یک احتمال (تابع احتمال) نسبت بدهیم.

$$\underset{\uparrow}{E} \;\; , \quad \underbrace{P(E)}_{\text{احتمال پیشامد}}$$

پیشامد

قضیه ۱- اگر A یک پیشامد با احتمال $P(A)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$P(A^c) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

اثبات: می‌دانیم که

$$A \cup A^c = \Omega$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $A \cap A^c = \varphi$ همچنین داریم

$$P(\Omega) = 1$$

$$\Longrightarrow \underbrace{P(\Omega)}_{1} = P(A \cup A^c) \underset{\substack{\text{اصل 3} \\ A \cap A^c = \varphi}}{=} P(A) + P(A^c)$$

$$\Longrightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

قضیه 2 (نتیجه قضیه 1) همواره داریم $P(\phi) = 0$

اثبات: میدانیم که $\phi^c = \Omega$, $\underbrace{P(\Omega) = 1}_{\text{اصل } 2}$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به قضیه } 1} P(\phi) = 1 - P(\phi^c) = 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{1} = 0$$

قضیه 3 - برای هر پیشامد دلخواه A داریم

$$P(A) \le 1$$

اثبات: با توجه به قضیه 1 می‌دانیم که

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\Longrightarrow \quad P(A) = 1 - P(A^c) \xrightarrow[\forall E,\ P(E) \ge 0]{\text{اصل } 1} P(A) \le 1$$

نتیجه: با توجه به اصل 1 و قضیه 3 داریم

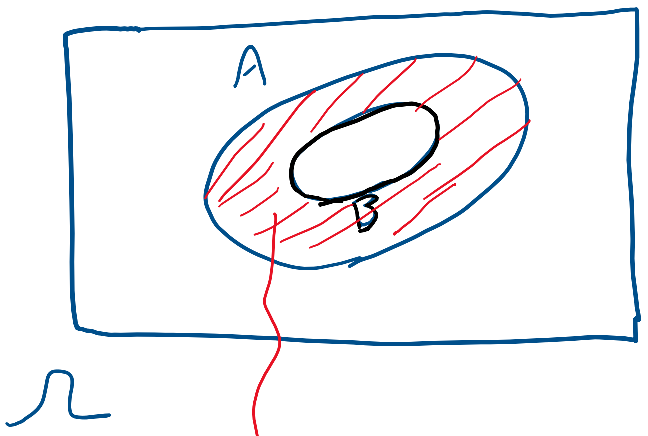
$$\forall E \subset \Omega \,; \quad \underbrace{0 \le P(E) \le 1}$$

قضیه 4 - اگر A و B دو پیشامد باشند، بطوری که $B \subseteq A$ باشد، آنگاه داریم

$$P(B) \leq P(A)$$

اثبات:

می دانیم



$$A = B \cup (A - B)$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$A = B \cup (A \cap \bar{B})$$

$$\xrightarrow[B \cap (A-B) = \varphi]{\text{اصل } 3} P(A) = P(B) + P(A \cap \bar{B}) \quad (*)$$

$$P(A\cap\bar{B})\geq 0 \xrightarrow{\text{اصل 2}} P(A)\geq P(B)$$

قضیه 5 (نتیجه‌ی قضیه 4)

اگر A , B دو پیشامد باشند به طوری $B\subseteq A$ برقرار باشد، آنگاه داریم

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

یا: $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(B)$

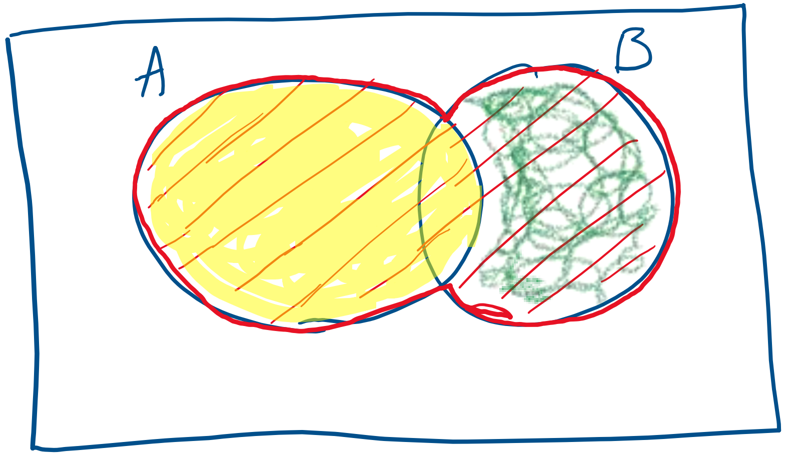
اثبات: با توجه به اثبات قضیه‌ی 4، داریم

$$\xrightarrow{(*)} P(A\cap\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(B)$$

قضیه 6 : برای هر دو پیشامد دلخواه A , B همواره داریم

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

اثبات : می‌دانیم که



Ω

$$A\cup B = A\cup(B-A)$$

یا : $$A\cup B = A\cup(B\cap\bar{A})$$

$$A\cap(B-A)=\varphi \xrightarrow{\text{اصل } 3} P(A\cup B) = P(A) + P(B\cap\bar{A}) \qquad (I)$$

از طرف دیگر داریم،

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$\xRightarrow{\text{اصل } 3} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\xRightarrow{(\mathrm{I}),\,(\mathrm{II})} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

در ادامه می خواهیم با توجه به اصل ها و قضیه های مطرح شده ، به هر پیشامد الگو ، یک تابع احتمال نسبت دهیم . این اصل ها و قضیه ها به ما کمک می کنند که یک تابع ریاضی مناسب به عنوان تابع احتمال برای هر پیشامد دلخواه تعریف کنیم . علاوه بر این قضیه های مطرح شده به ما نشان می دهند که برای محاسبه ی احتمال هر پیشامد دلخواهی روی فضای نمونه ، می توانیم احتمال را برحسب احتمال پیشامدهای دیگری نیز بیان کنیم . به این ترتیب لازم نیست که برای هر پیشامد محاسبات را داشته باشیم بلکه می توانیم احتمال آن را برحسب احتمال پیشامدهای دیگر نیز بنویسیم و احتمال را به دست بیاوریم .

در ابتدا و برای ساده‌تر شدن بحث، فضای نمونه را شمارش‌پذیر (مجموعهٔ محدود) در نظر می‌گیریم. (پس از اینکه مفاهیم را بیان کردیم، آنها را به حالت شمارش‌ناپذیر تعمیم خواهیم داد)

بنابراین فرض می‌کنیم مجموعه Ω شامل نتایج (اعضای نمونه) به صورت زیر باشد،

$$\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

در این فضای نمونه، پیش‌آمدهای تک‌عضوی (زیرمجموعه‌های تک‌عضوی Ω) را به عنوان پیش‌آمدهای ساده در نظر می‌گیریم.

باید عضو

$$A_i = \{\xi_i\}$$

با توجه به اصل های اساسی احتمال، داریم

$$\xrightarrow[A_i \text{ ها دو به دو جدا از هم}]{\text{اصل سوم}} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

از طرف دیگر می دانیم که

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad , \quad P(\Omega) = 1$$

$$\longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

علاوه بر این داریم.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (2)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \quad (1)$$

(1) و (2) $\Longleftarrow$ هر پیشامدی روی فضای نمونه را می‌توان به صورت اجتماع چندین پیشامد دیگر (ساده‌تر) نوشت و بر این اساس احتمال آن را به دست آورد.

* مطالب گفته شده به راحتی قابل تعمیم به فضای نمونه شمارش پذیر، نامحدود هستند و با در نظر گرفتن ملاحظاتی، قابل.

تعمیم: فضای نمونه شمارش ناپذیر (محدود یا نامحدود) نیز هستند.