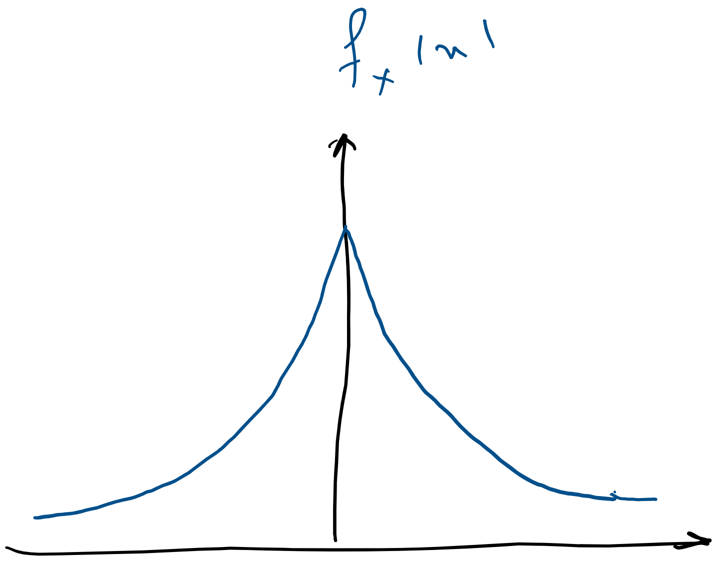
به نام خدا

- متغیر تصادفی لاپلاسین



$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$

- متغیر تصادفی گاما

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} u(x) \quad , \quad \Gamma(r) = \underbrace{\int_0^\infty y^{r-1} e^{-y}\, dy}_{\int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx}$$

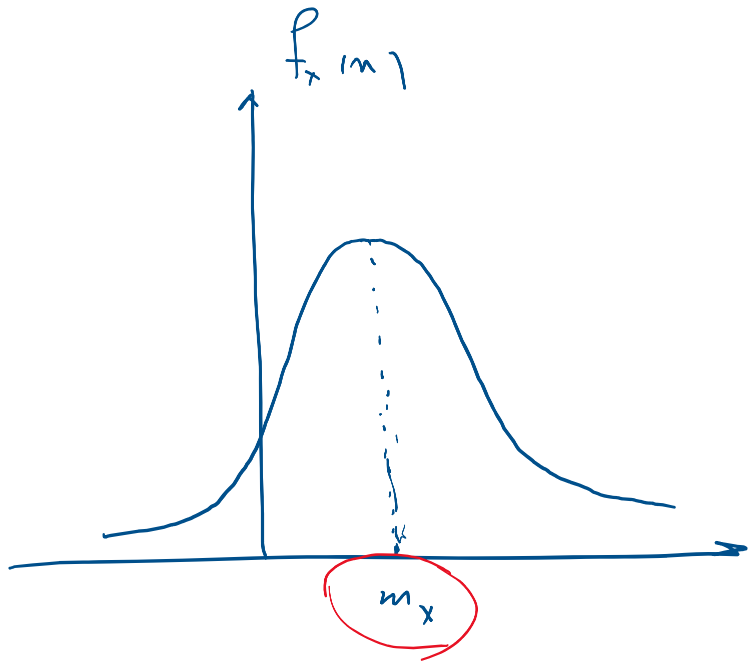
$$EX = \int_0^\infty x f_X(x)\, dx$$

- ممان های یک متغیر تصادفی

- ممان های اول و دوم

مثال ۲- برای متغیر تصادفی نرمال X با تابع چگالی احتمال زیر، میانگین و واریانس را به دست بیاورید.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$



$$EX = m_x \equiv \eta_x \equiv \mu_x = m_x$$

$$Var(X) = E(X-m_x)^2 = EX^2 - E^2X = \sigma_x^2$$

$$P_x = EX^2 = \sigma_x^2 + E^2X = \sigma_x^2 + m_x^2$$

* مثال عددی :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x^2-6x+9}{4}\right)$$

میانگین و واریانس متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ به صورت بالا را به دست بیاورید.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \underbrace{(2)}_{\sigma_X^2}}} \exp\left(-\frac{(\overbrace{x-3}^{m_X})^2}{2\underbrace{(2)}_{\sigma_X^2}}\right)$$

$$\begin{cases} EX = m_X = 3 \\ Var(X) = \sigma_X^2 = 2 \\ P_X = EX^2 = 2+9 = 11 \end{cases}$$

مثال: متغیر تصادفی X را با میانگین m_x و واریانس σ_x^2 در نظر می‌گیریم. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = \underbrace{ax+b}$ تعریف می‌کنیم. میانگین و واریانس Y را برحسب میانگین و واریانس X به دست بیاورید. (a، b اسکالر هستند)

$$m_y = EY = E(ax+b) = aEX + b = am_x + b$$

$Y = ax+b$

$E(\cdot)$ یک عملگر خطی است

$$Var(y) = \underbrace{E(y-m_y)^2}_{①} = \underbrace{Ey^2 - E^2y}_{②}$$

* از رابطه ① برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. به عنوان تمرین مسئله را یکبار نیز با رابطه ② حل کنید.

$$Var(y) = E(\underset{ax+b}{y} - \underset{am_x+b}{m_y})^2 = E(ax+\cancel{b}-am_x-\cancel{b})^2$$

$$= E(a(x-m_x))^2 = a^2\,\underbrace{E(x-m_x)^2}_{Var(x)} = a^2\sigma_x^2$$

E(.) یک عملگر خطی

$$y = ax + b \quad , \quad EX = m_x \quad , \quad Var(X) = \sigma_x^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Ey = am_x + b \equiv m_y \\ Var(y) = a^2 \sigma_x^2 \equiv \sigma_y^2 \end{cases}$$

* یک نامساوی مهم دیگر که در ارتباط با ممان های اول و دوم یک متغیر تصادفی مطرح می شود،
نامساوی چبیشف است که به صورت زیر بیان می شود.

$$P_r\left\{ |X - m_x| < \epsilon \right\} \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{\epsilon^2}$$

Tchebyshef's inequality

(اثبات با کمک نامساوی مارکف انجام می شود. به عنوان تمرین)

در ادامه بحث، می خواهیم چند تابع مهم دیگر را که برای تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی استفاده می‌شوند، معرفی کنیم. این توابع با استفاده از عملگر امید ریاضی تعریف می شوند.

به عبارت دیگر، این توابع بر پایه توابع احتمال متغیر تصادفی (یعنی تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال) تعریف می شوند.

۱ـ تابع مولد گشتاور Moment Generator Function

برای یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ تابع مولد گشتاور را به صورت زیر تعریف می شود.

$$\underbrace{\varphi_X(s)}_{\text{تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی } X} \triangleq E\, e^{sX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$$

* با توجه به تعریف $\varphi_X(s)$ می‌توان گفت که $\varphi_X(-s)$ تبدیل لاپلاس تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ است.

$\Longleftarrow$ بنابراین از خصوصیات تبدیل لاپلاس می‌توانیم برای به دست آوردن $\varphi_X(s)$ و استخراج خصوصیات آماری X استفاده کنیم.

علاوه بر این با استفاده از خصوصیات تبدیل لاپلاس می‌توانیم برخی مسائل که راه حل آنها با استفاده از تابع چگالی احتمال، طولانی و پیچیده است را با کمک $\varphi_X(s)$ راحت‌تر حل کنیم.

* برخی خصوصیات تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X، به صورت زیر است:

$$1)\quad \varphi_X(0) = E\, e^{sX}\Big|_{s=0} = E\,1 = 1$$

$$2)\quad \frac{d^n}{ds^n}\varphi_X(s)\Big|_{s=0} = E\,X^n$$

به همین دلیل تابع $\varphi_X(s)$ را تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X، نامگذاری کرده‌اند. زیرا با استفاده از

$\varphi_X(s)$ می‌توانیم ممان‌های متغیر تصادفی X را به دست بیاوریم.

اثبات:

$$\frac{d^n}{ds^n}\varphi_X(s) = \frac{d^n}{ds^n} E\, e^{sX} = E \frac{d^n}{ds^n} e^{sX}$$

عوض کردن مکان دو عملگر خطی

(تمرین: اثبات را کامل کنید)

3) $Y = aX + b \implies \varphi_Y(s) = e^{bs}\varphi_X(as)$

اثبات:

$$\varphi_y(s) = E\, e^{sy} = E\, e^{s(ax+b)}$$

$$\uparrow$$
$$y = ax + b$$

$$\Longrightarrow \varphi_y(s) = E\, e^{bs} e^{asx} = e^{bs} \underbrace{E\, e^{sax}}_{\varphi_x(as)}$$

$$\Longrightarrow \varphi_y(s) = e^{bs}\, \varphi_x(as)$$

4) $Y = g(X) \xrightarrow{\text{قضیه اساسی امید ریاضی}} \varphi_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s g(x)} f_X(x)\, dx$

$$\varphi_Y(s) = E e^{sY}$$
$$= \int_{-\infty} e^{sy} f_Y(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s g(x)} f_X(x)\, dx$$

مثال: تابع مولد گشتاور را برای یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ به دست بیاورید.

$X \sim \exp(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$

$$\varphi_X(s) = E\, e^{sX} = \int_0^\infty e^{sx} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - s)x}\, dx$$

$$= \cdots$$

با محاسبه انتگرال، $\varphi_X(s)$ به دست می‌آید.

راه حل دیگر، این است که با توجه به اینکه می‌دانیم $\varphi_X(-s)$ تبدیل لاپلاس $f_X(x)$ است، بدون محاسبه انتگرال، از جدول تبدیل لاپلاس کمک بگیریم.

با مراجعه به جدول تبدیل لاپلاس

$$e^{-\lambda x}\, u(x) \xleftrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} \frac{1}{s+\lambda} \qquad Re\{s\} > -\lambda$$

می‌دانیم که $\varphi_x(-s)$ تبدیل لاپلاس $f_x(x)$ است

تبدیل s به -s

$$\Longrightarrow \quad \varphi_x(s) = \frac{\lambda}{-s+\lambda} \qquad \underbrace{Re\{-s\} > -\lambda}_{Re\{s\} < \lambda}$$

$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x)$

$$\Rightarrow \quad \varphi_x(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad Re\{s\} < \lambda$$

۲- تابع مشخصه متغیر تصادفی X (Characteststistic Function) (cf)

برای یک متغیر تصادفی X ، تابع مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_X(\omega) \triangleq E\, e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx$$

با توجه به تعریف بالا، می‌توان گفت که $\varphi_X(-\omega)$ تبدیل فوریه $f_X(x)$ است

$$\varphi_X(-\omega) \xleftrightarrow{FT} f_X(x)$$

بنابراین از خصوصیات تبدیل فوریه می توانیم برای به دست آوردن $\varphi_x(\omega)$ و استخراج مشخصات آماری متغیر تصادفی X استفاده کنیم. علاوه بر این می توانیم با استفاده از خصوصیات تبدیل فوریه، برخی مسائل که راه حل آنها با استفاده از $f_x(x)$ طولانی و پیچیده است، با کمک $\varphi_x(\omega)$ راحت تر حل کنیم.

در ادامه برخی خصوصیات تابع مشخصه را بیان خواهیم کرد.

1) $\forall \omega; \quad |\varphi_x(\omega)| \leq |\varphi_x(0)| = 1$

$$\varphi_x(0) = E\, e^{j\omega x}\Big|_{\omega=0} = E\,1 = 1$$

2) $$\frac{d^n}{d\omega^n}\varphi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = j^n\,E X^n$$

یعنی با کمک $\varphi_X(\omega)$ می‌توان ممان‌های متغیر تصادفی X را به دست آورد.

(اثبات مشابه حالت قبل و به عنوان تمرین)

مثال: برای یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین m_X و واریانس σ_X^2، تابع مشخصه را به دست بیاورید:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$\varphi_X(\omega) \triangleq E\, e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, dx = \dots$$

با محاسبه انتگرال بالا، تابع $\varphi_X(\omega)$ را بدست می‌آوریم.

راه حل دیگر این است که با توجه به اینکه می‌دانیم $\varphi_X(-\omega)$ و $f_X(x)$ زوج تبدیل فوریه هستند،

با مراجعه به جدول تبدیل فوریه، $\varphi_X(\omega)$ را بدست بیاوریم.

$$\phi_X(-\omega) \xleftrightarrow{FT} f_X(x)$$

با مراجعه به جدول تبدیل فوریه

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

از جدول فوریه می‌دانیم،

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \xleftrightarrow{FT} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

تابع $f_X(x)$ به اندازه $\frac{1}{\sigma_X^2}$، scale شده و به اندازه‌ی m_X شیفت پیدا کرده است

بنابراین با توجه به خصوصیات تبدیل فوریه می توان نوشت ،

$$\varphi_x(\omega) = e^{+j\omega m_x} \, e^{-\frac{\sigma_x^2 \omega^2}{2}}$$

$$\varphi_x(\omega) = e^{j\omega m_x} \, e^{-\frac{\sigma_x^2 \omega^2}{2}}$$

توابعی که تاکنون معرفی کردیم ، یعنی تابع مشخصه ، تابع مولد گشتاور ، در ارتباط با متغیرهای تصادفی پیوسته ، قابل بیان هستند. برای متغیرهای تصادفی گسسته ، به صورت معادل ، تابع مولد احتمال را معرفی می کنیم.

۳ـ تابع مولد احتمال (Probability Generator Function) (pgf)

برای یک متغیر تصادفی گسسته X، با تابع جرم احتمال $P_X(x)$ تابع مولد احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Gamma_X(z) \triangleq E\, z^X = \sum_{x} z^x P_X(x)$$

با توجه به تعریف بالا، می‌توان گفت که $\Gamma_X(z^{-1})$ تبدیل Z تابع جرم احتمال $P_X(x)$ است

$$\Gamma_X(z^{-1}) \xleftrightarrow{ZT} P_X(x)$$

بنابراین از خصوصیات تبدیل Z می‌توان برای بدست آوردن $P_X(z)$ را استخراج خصوصیات آماری متغیر تصادفی X استفاده کرد. علاوه بر این با استفاده از خصوصیات تبدیل Z می‌توان برخی مسائل را که حل آنها با استفاده از $P_X(x)$ طولانی و پیچیده است با کمک $P_X(z)$ راحت‌تر حل کرد.

برخی خصوصیات تابع مولد احتمال به صورت زیر است.

۱- اگر تابع $P_X(z)$ را به صورت تابعی از Z در اختیار داشته باشیم و آن را برحسب توان‌های Z^x بسط دهیم، ضریب Z^{x_i} در واقع احتمال نقطه‌ی x_i را به دست می‌دهد یعنی همان $P_X(x_i)$

$$P_r\{X = x_i\} = P_X(x_i)$$

$$\Gamma_X(z) \triangleq E z^X = \sum_{x} z^{x} P_X(x) = \sum_{x_i} z^{x_i} \underbrace{P_X(x_i)}$$

ضریب z^{x_i} معادل $P_X(x_i)$ است.

به همین جهت به تابع $\Gamma_X(z)$، تابع مولد احتمال گفته می‌شود.

2) $\Gamma_X(z)\big|_{z=1} = \Gamma_X(1) = E z^X\big|_{z=1} = E1 = 1$

3) $$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)$$

ممان فاکتوریل مرتبه n ام متغیر تصادفی X

اثبات: $$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z) = \frac{d^n}{dz^n} E\, z^X = E\,\frac{d^n}{dz^n} z^X$$

باید توجه داشته باشیم که برای به دست آوردن ممان مرتبه n ام یک متغیر تصادفی گسسته با استفاده از تابع مولد احتمال، لازم است که ممان های مرتبه پایین تر [illegible] به دست بیاوریم و مرحله به مرحله جلو برویم تا به ممان مورد نظر برسیم.

مثال: ممان مرتبه سوم متغیر تصادفی گسسته X را با کمک $\Gamma_X(z)$ به‌دست بیاورید

$$\frac{d^3}{dz^3}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X\underbrace{(X-1)(X-2)}_{X^2-3X+2} = E\left(X^3-3X^2+2X\right)$$

$$\frac{d}{dz}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X \checkmark$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X(X-1) = E\,X^2 - \overset{\checkmark}{E\,X} \longrightarrow E\,X^2$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X^3 - 3\,\overset{\checkmark}{E\,X^2} + \overset{\checkmark}{2\,E\,X} \longrightarrow E\,X^3$$

مثال: تابع مولد احتمال متغیر تصادفی برنولی را به دست بیاورید.

$$X \sim \text{Bernolli}(P)$$

$$X = \begin{cases} 1 & P \\ 0 & 1-P \end{cases}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} P & x=1 \\ 1-P & x=0 \end{cases}$$

$$\Gamma_X(z) = \sum_x z^x P_X(x) = z^0 P_X(0) + z^1 P_X(1) = 1-P+PZ$$

* ممان های اول و دوم متغیر تصادفی برنولی را به دست بیاورید:

راه حل اول: استفاده از تعریف

$$m_X = EX = \sum_x x P_X(x) = 0 \times (1-P) + 1P = P$$

$$P_X = EX^2 = \sum_x x^2 P_X(x) = 0^2(1-P) + 1^2 P = P$$

$$Var(X) = EX^2 - E^2X = P - P^2 = P(1-P)$$

راه حل دوم: استفاده از $\Gamma_X(z)$

$$\frac{d}{dz}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = P = EX$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = 0 = EX(X-1) = EX^2 - EX$$

$$\Rightarrow \quad EX^2 = EX = P$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = EX^2 - E^2X = P - P^2 = P(1-P)$$

تمرین: برای تمام متغیرهای تصادفی پیوسته معرفی شده، تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه را به دست بیاورید. برای تمام متغیرهای تصادفی گسسته معرفی شده، تابع مولد احتمال را به دست بیاورید. ممان های اول و دوم را با کمک این توابع نیز محاسبه کنید.