به نام خدا

Expectation

امید ریاضی

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

معیاری از میانگین مقادیری که $g(x)$ اختیار می‌کند، است.

$Y = g(X)$

قضیه اساسی امید ریاضی

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = E\overbrace{g(X)}^{Y}$$

نکته دیگری که در ارتباط با مفهوم امید ریاضی باید به آن توجه کنیم، این است که امید ریاضی یک عملگر خطی است

یعنی همواره داریم

$$E\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E g_i(X)$$

$$\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

اثبات:

$$\underbrace{E\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(X)}_{\text{تابعی از } X \text{ یعنی } g(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(x)\right)}_{g(x)} f_X(x)\,dx$$

$$E \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) \right) f_X(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_i g_i(x) f_X(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f_X(x)\, dx}_{E g_i(X)}$$

$$E \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i E g_i(X)$$

* همواره می‌توان جای دو عملگر خطی را در محاسبات با یکدیگر عوض کرد. به طور مثال

$$E \frac{d}{d\alpha} g(x) = \frac{d}{d\alpha} E g(x)$$

از این نکته می‌توان برای ساده سازی محاسبات امید ریاضی نیز استفاده کرد.

مثال: فرض کنیم متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = aX + b$ تعریف می‌کنیم. امید ریاضی Y را بدست بیاورید.

$$EY = E(aX+b) \overset{\text{خطی بودن عملگر خطی}}{=} aEX + \underbrace{Eb}_{\int_{-\infty}^{\infty} b f_X(x)dx = b} = aEX + b = a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx}_{} + b$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x) dx$$

$$E(aX+b) = aEX + b \quad , \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

مثال: برای متغیر تصادفی X ، تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ را در اختیار داریم ، حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید

(ω ، t ، θ پارامترهای اسکالر هستند)

$$E\,X \underbrace{\sin(\omega t+\theta)}_{\text{متغیر تصادفی نیست}} = \sin(\omega t+\theta)\,EX$$

$$E\,X\sin X = \int_{-\infty}^{\infty} x \sin x \, f_X(x)\,dx$$

با کمک عملگر امید ریاضی توابع و پارامترهایی برای متغیرهای تصادفی تعریف می‌شوند که با کمک آنها می‌توانیم اطلاعاتی در مورد خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی به دست بیاوریم. یکی از مفاهیمی برای این منظور با استفاده از عملگر امید ریاضی تعریف می‌شود، ممان‌های یک متغیر تصادفی هستند.

* ممان‌های یک متغیر تصادفی Moment

برای یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، ممان مرتبه nام متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود.

گشتاور مرتبه n ام متغیر تصادفی X $\triangleq E X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$

با کمک گشتاورهای یک متغیر تصادفی می‌توان مشخصه‌ها یا خصوصیاتی را در مورد متغیر تصادفی استخراج کرد. از این مشخصه‌ها به طور مثال می‌توان برای طبقه‌بندی classification متغیرهای تصادفی استفاده کرد.

* از بین گشتاورهای یک متغیر تصادفی، گشتاورهای اول و دوم، اهمیت ویژه‌ای دارند که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

* ممان مرتبه اول متغیر تصادفی X

$EX^n \triangleq$ ممان مرتبه n ام

$$\xrightarrow[n=1]{\text{ممان مرتبه اول}} \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \underbrace{f_X(x)\, dx}_{\text{فراوانی}} = \underbrace{m_X = \eta_X = \mu_X}_{}$$

مقادیری که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند

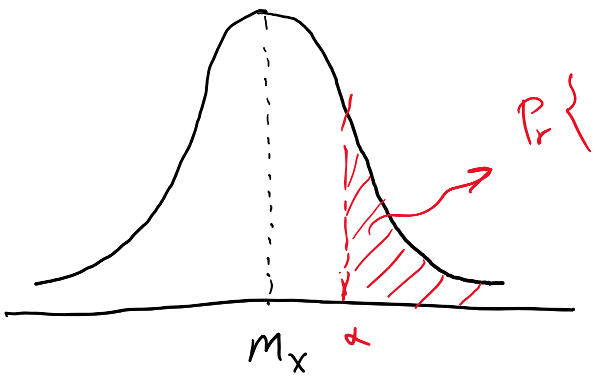
notation های مختلفی که برای EX وجود دارد

EX نشان دهنده میانگین مقادیری است که متغیر تصادفی اختیار می‌کند

Mean of X

* اگر به $f_X(x)$ مشابه تابع چگالی جرمی نگاه کنیم، قابل تصور خواهد بود که نقطه تعادل حساب می‌شود.

$m_X = EX$ مشابه به مرکز ثقل متغیر تصادفی



$P_r\{X \geq \alpha\} \leq \frac{m_X}{\alpha}$

بنابراین اگر متغیر تصادفی X دارای یک تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد به طوری که $f_X(x)$ حول نقطه $x = m_X$ متقارن باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $m_X = EX = \eta_X = \mu_X$ (بدون نیاز به محاسبه انتگرال)

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$A \text{ جرم} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx \longrightarrow \text{مرکز ثقل} = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x)\, dx$$

* یک نامساوی مهم تر در ارتباط با ممان اول یک متغیر تصادفی x وجود دارد که به آن نامساوی
مارکف می گوییم. Markov inequality

$$P_r\{X \geq \alpha\} \leq \frac{EX}{\alpha}$$

✓ ممان مرتبه دوم متغیر تصادفی X

ممان مرتبه دوم متغیر تصادفی $\Rightarrow n = 2$

$$E X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \underbrace{f_X(x)\,dx}_{\text{فراوانی}} = \underbrace{P_X = r_X}_{\text{notation های مختلف}}$$

مقادیری که X^2 اختیار می کند

EX^2 نشان دهنده ی میانگین بزرگی مقداری است که متغیر تصادفی X اختیار می کند و به آن قدرت متغیر تصادفی X گفته می شود

Power of X

به قدرت یک متغیر تصادفی x ، Mean Square متغیر تصادفی نیز گفته می‌شود

$$P_x = \text{Mean Square of } x \equiv E x^2$$

به جذر قدرت یک متغیر تصادفی ، rms متغیر تصادفی گفته می‌شود.

$$rms = \sqrt{E x^2} = \sqrt{P_x} = \text{root meas square of } x$$

* برای یک متغیر تصادفی X ، ممان های مرکزی نیز تعریف می‌شوند. ممان های مرکزی در ارتباط با متغیر تصادفی مرکزی متناظر با X تعریف می‌شوند.

ممان های مرکزی متغیر تصادفی X

برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ ، ممان مرکزی مرتبه n ام به صورت زیر تعریف می شود.

ممان مرکزی مرتبه n ام متغیر تصادفی X $\triangleq E(X-m_X)^n = E(X-\eta_X)^n = E(X-\mu_X)^n$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_X)^n f_X(x)\, dx$$

$$\tilde{X} = X - m_X = X - \eta_X = X - \mu_X$$

متغیر تصادفی مرکزی شده X با

در واقع مبدأ مختصات را به نقطه m_X (مرکز ثقل متغیر تصادفی) منتقل کرده ایم

یکی از کاربردی‌ترین گشتاورهای مرکزی یک متغیر تصادفی، گشتاور مرکزی مرتبه دوم متغیر تصادفی است که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

توجه: گشتاور مرکزی مرتبه اول یک متغیر تصادفی X همواره برابر صفر است

گشتاور مرکزی مرتبه اول X $\underset{n=1}{=} E(X-m_x)^1 = E(X-m_x) = \underbrace{EX}_{m_x} - m_x = 0$

$= E\tilde{X} = 0$

گشتاور مرکزی مرتبه دوم متغیر تصادفی X $\underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{=} E(X - m_X)^2 = E\tilde{X}^2$

$$\equiv E(X - \eta_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x - \eta_x)^2}_{\text{بزرگی انحراف } X \text{ از مقدار میانگین خودش}} \underbrace{f_X(x)\, dx}_{\text{فراوانی}}$$

بنابراین $E\tilde{X}^2$ نشان دهنده میانگین بزرگی انحراف متغیر تصادفی X از مقدار میانگین خودش است که به آن واریانس متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

$$E(X - m_X)^2 = E(X - \eta_X)^2 = E\tilde{X}^2 \equiv \mathrm{Var}(X) \equiv \sigma_X^2$$

به جذر واریانس، انحراف از معیار متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

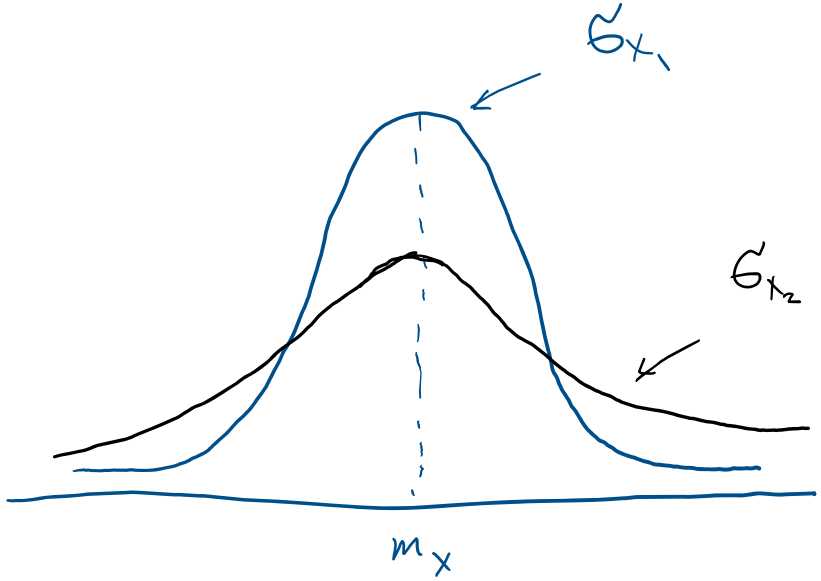
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$

انحراف از معیار: σ_X

standard deviation

نشان دهنده میزان انحراف X از مقدار میانگین خودش است.

اگر σ_x^2 (یا σ_x) را می‌توان در ساختار تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X نیز مشاهده کرد



$\sigma_{x_1} < \sigma_{x_2}$

هرچه برای یک متغیر تصادفی X ، σ_x بزرگتر باشد، انحراف x از مقدار میانگین خودش بیشتر است و تابع چگالی احتمال آن حول m_x ، پهن‌تر (گسترده‌تر) خواهد بود.

هرچه σ_x بزرگتر باشد تابع چگالی احتمال حول m_x گسترده‌تر و پهن‌تر می‌شود.

* با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی و تعریف ممان مرکزی مرتبه n ام ، همواره می توانیم رابطه ای بین ممان مرکزی مرتبه n ام و ممان های غیر مرکزی مرتبه n ام و پایین تر ، پیدا کنیم.

ممان مرکزی مرتبه n ام $= E(X - m_X)^n = E\tilde{X}^n$

$$= E\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \, m_X^{(n-i)} \, (-1)^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} m_X^{(n-i)} \underbrace{EX^i}_{\text{ممان مرتبه i ام متغیر تصادفی}}$$

مثال: رابطه بین واریانس متغیر تصادفی x را با ممان های اول و دوم متغیر تصادفی به دست بیاورید.

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E(X - m_x)^2 = E\tilde{X}^2$$

$$= E(X^2 - 2m_x X + m_x^2) = \underbrace{EX^2}_{\text{ممان مرتبه دوم} = P_x} - 2m_x \underbrace{EX}_{m_x} + m_x^2$$

ممان مرتبه دوم

$$Var(x) = \sigma_x^2 = EX^2 - m_x^2 = P_x - m_x^2$$

ممان مرتبه اول

$$Var(x) = \sigma_x^2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - E^2X = E(X - EX)^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E\tilde{X}^2 = E(X - m_X)^2 = EX^2 - E^2X \geq 0 \qquad \text{(I)}$$

Var(X) همواره یک مقدار غیرمنفی است زیرا داریم

$$\mathrm{Var}(X) = E\tilde{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x - m_x)^2}_{\text{مقادیر غیرمنفی}} f_x(x)\, dx \geq 0$$

میانگین مقادیر غیرمنفی، همواره غیرمنفی است

$$\text{(I)} \Rightarrow \quad EX^2 \geq E^2X$$

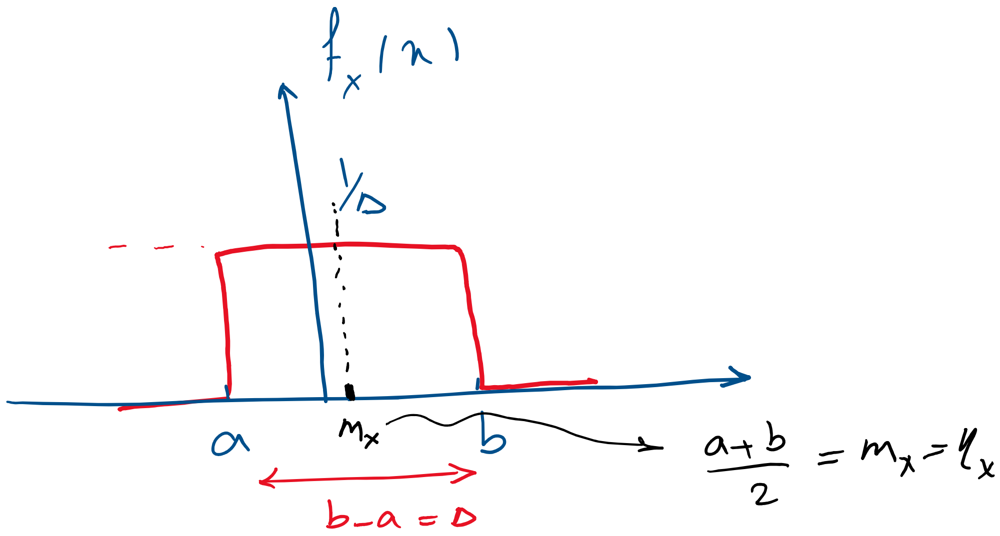
(یک حالت ساده از نامساوی شوارتز)

تمرین : میانگین و توان و واریانس تمامی متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته که در جلسات پیش معرفی کردیم را به دست بیاورید.

مثال : متغیر تصادفی یکنواخت

$X \sim \text{Uniform}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



میانگین، توان و واریانس این متغیر تصادفی را به دست بیاورید.

$$m_X = \eta_X = \mu_X = EX = \int_a^b x \underbrace{f_X(x)}_{1/\Delta} dx = \frac{1}{\Delta} \int_a^b x \, dx$$

$$= \frac{1}{\Delta} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{\underbrace{(b-a)}_{\Delta}(b+a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$P_X = EX^2 = \int_a^b x^2 \underbrace{f_X(x)}_{1/\Delta} dx = \frac{1}{\Delta} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{\Delta} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{\Delta} \frac{1}{3} \underbrace{(b^3 - a^3)}_{(b-a)(b^2+ab+a^2)} = \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2)$$

$$\mathrm{Var}(X) = E X^2 - E^2 X = P_X - m_X^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right) - \frac{1}{4}\underbrace{(a+b)^2}_{a^2+2ab+b^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}\left(a^2 - 2ab + b^2\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

تمرین: واریانس X را از رابطه

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - m_X)^2$$

به دست بیارید

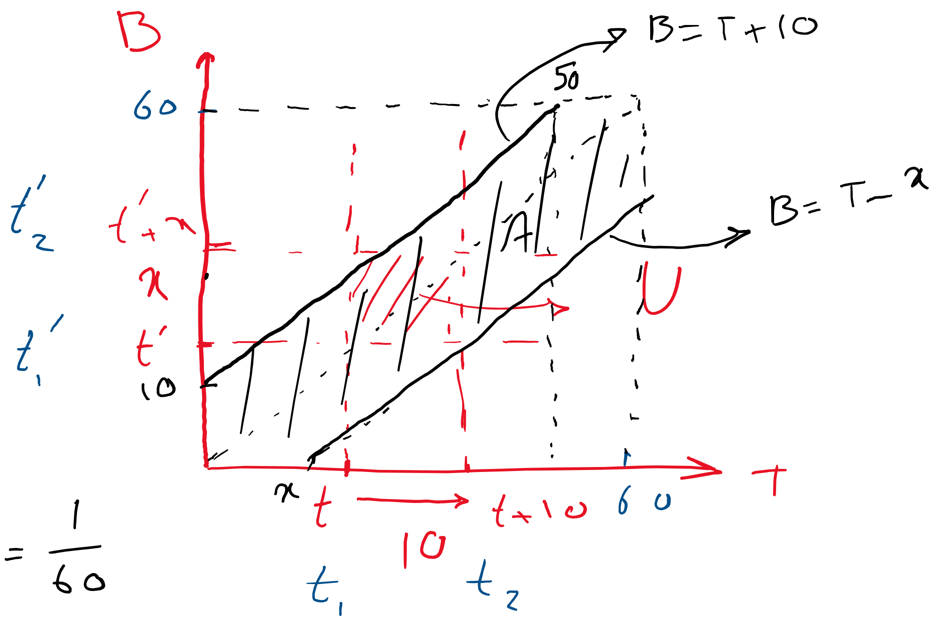
$$= \int (x - m_X)^2 f_X(x)\,dx$$

در بازه ساعت 9 تا 10

T : 10 min

B : x min

$P(T, B) = \frac{1}{2}$



$$P_r\{t_1 < T < t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{60}$$

$$P_r\{t'_1 < B < t'_2\} = \frac{t'_2 - t'_1}{60}$$

تابع چگالی $= \frac{1}{60}$

استقلال B, T

احتمال اینکه T , B باهم در ایستگاه باشند $= P_r\{T \leq B + x$ و $B \leq T + 10\} = P(A)$

$$= \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \text{مساحت ناحیه } A = \frac{\overbrace{3600 - \frac{1}{2}(50 \times 50) - \frac{1}{2}(60-x)(60-x)}^{3600 + x^2 - 120x}}{3600}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{550 - \frac{1}{2}x^2 + 60x}{3600} = \frac{1}{2} \rightarrow 1100 - x^2 + 120x = 3600$$

$$\Rightarrow x^2 - 120x + 2500 = 0 \Rightarrow x = 60 - \sqrt{1100}$$