به نام خدا

$$X \sim \exp(10) \qquad \lambda = 10 \text{ Year}$$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$$

$$P_r\{X > 5\} = 1 - F_X(x)\Big|_{x=5\text{ year}} = e^{-\frac{x}{10}}\Big|_{x=5} = e^{-5/10}$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\lambda = 1/10$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\lambda = 10$$

مثال‌هایی از متغیرهای تصادفی

- پیوسته
- گسسته

- متغیر تصادفی دوجمله‌ای   Binomial   (توزیع دوجمله‌ای)

متغیر تصادفی دوجمله‌ای X، نشان دهنده تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در n بار تکرار آزمایش تصادفی است.

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای X مقادیری از مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ را اختیار می‌کند.

به دست آوردن pmf متغیر تصادفی دوجمله ای

$$P_r\{X=i\} = P_X(i) \quad , \quad i=0,1,\dots,n$$

$$P_r\{X=i\} = \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

$$X \sim \text{Binomial}(n,p)$$

$$(p+(1-p))^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

متغیر تصادفی پواسن (توزیع پواسن) Poisson

متغیر تصادفی پواسن X نشان دهنده تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در بی نهایت تکرار آزمایش تصادفی است. همچنین متغیر تصادفی پواسن برای نشان دادن تعداد تکرار یک پیش آمد مورد نظر، وقتی به یک پدیده تصادفی در یک بازه زمانی مشخص نگاه می کنیم، نیز قابل استفاده است. این متغیر تصادفی برای مدل سازی بسیاری از پدیده های تصادفی قابل استفاده است، به عنوان مثال برای مدل سازی تعداد غلط های تایپی در یک متن یا تعداد افرادی که در یک زمان مشخص به یک صف وارد یا از آن خارج می شوند یا تعداد کارهای

که در یک شبکه مخابراتی سلولی، در یک زمان مشخص درخواست اتصال به شبکه را می‌دهند. از این جهت
متغیر تصادفی پواسن، یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی گسسته است.

• طبق تعریفی که برای متغیر تصادفی پواسن بیان کردیم، متغیر تصادفی پواسن را می‌توانیم
حد متغیر تصادفی دوجمله‌ای در نظر بگیریم وقتی $n \to \infty$ به شرط اینکه $np \to a$

برای به دست آوردن pmf متغیر تصادفی پواسن می‌توانیم از pmf متغیر تصادفی دوجمله‌ای
استفاده کنیم درحالی که $n \to \infty$ با شرط اینکه $np \to a$

* به دست آوردن pmf متغیر تصادفی پواسن

$$P_r\{X=i\} = P_x(i) \quad , \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$P_r\{X=i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\Rightarrow P_r\{X=i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{(n-i+1)\cdots(n-1)\,n}{i!}\, p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{i}}{i!}\, p^i (1-p)^{n}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n^i p^i}{i!} (1-p)^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{(np)^i}{i!} e^{-np}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-p)^n = e^{-np}$$

$$\Rightarrow \quad P_X(i) = P_r\{X = i\} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ np \to a}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\Rightarrow \quad P_X(i) = \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$: pmf of Poisson RV

$$X \sim \text{Poisson}(a)$$

یکی دیگر از خصوصیات این متغیر تصادفی، این است که خاصیت پایداری برای آن برقرار است.

* توابعی از یک متغیر تصادفی

در استفاده از متغیرهای تصادفی، در کاربردهای زیادی با توابعی از یک متغیر تصادفی X سروکار داریم. به عنوان مثال می‌خواهیم یک عملیات خطی روی X انجام دهیم یا X را از یک مدار یکسوکننده عبور دهیم یا بزرگی X (یعنی $|X|$) را می‌خواهیم بررسی کنیم یا X^2 را می‌خواهیم بررسی کنیم. در این گونه موارد، می‌خواهیم بدانیم که خصوصیات آماری تابعی از X به صورت $g(X)$ نسبت به خصوصیات آماری X چگونه تغییر می‌کند. به طور خاص در این بخش می‌خواهیم توابع احتمال $g(X)$ را با داشتن توابع احتمال X، به دست بیاوریم.

اگر $g(.)$ یک تابع دلخواه باشد که بر روی متغیر تصادفی x اعمال می‌شود، می‌توان نوشت.

$$Y = g(x)$$

در این صورت Y نیز یک متغیر تصادفی است. زیرا $X = X(\xi)$

$$Y = g(X(\xi)) \Rightarrow Y = Y(\xi)$$

$$\boxed{\Omega \xrightarrow{X(.)} \mathbb{R} \xrightarrow{g(.)} \mathbb{R} \Rightarrow \Omega \xrightarrow{g(X)} \mathbb{R}}$$

$$g(X) = Y$$

$$\Omega \xrightarrow{X(.)} \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R} \xrightarrow{g(.)} \mathbb{R} \Rightarrow \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R} \quad (Y = Y(\xi))$$

Y یک متغیر تصادفی است.

در این بخش هدف ما این است که خصوصیات آماری متغیر تصادفی Y (یعنی $F_Y(y)$, $f_Y(y)$) را با داشتن خصوصیات آماری X (یعنی $F_X(x)$, $f_X(x)$) به دست بیاوریم.

می دانیم $Y = g(X)$ (رابطه ها را در حالت پیوسته می نویسیم)

$$F_Y(y) = P_r\{Y \le y\} \underset{Y=g(X)}{=} P_r\{g(X) \le y\} \equiv P_r\{X \in A_y\}$$

یک عملیات ریاضی لازم است تا ناحیه ای را برای X به دست بیاوریم که به ازای آن $g(X) \le y$ برقرار باشد.

به طور مثال اگر $g(\cdot)$ معکوس پذیر و اکیدا صعودی باشد، داریم

$$A_y \equiv X \le g^{-1}(y)$$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = P_r\{Y \le y\} = P_r\{X \in A_y\} = \int_{A_y} f_X(x)\,dx \equiv$$

عملیات ریاضی برای محاسبه انتگرال

تابعی از y و همان $F_Y(y)$ است

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

مثال: فرض کنیم که برای متغیر تصادفی X، توابع احتمال را به صورت $F_X(x)$, $f_X(x)$

در اختیار داریم. برای در حالت زیر، توابع احتمال متغیر تصادفی Y را به دست بیاورید.

$F_Y(y), f_Y(y)$

1) $Y = aX + b = g_1(X)$

2) $Y = |X| = g_2(X)$

1) $Y = aX + b$

$$F_Y(y) = P_r\{Y \leqslant y\} = P_r\{aX + b \leqslant y\} = P_r\{aX \leqslant y - b\}$$

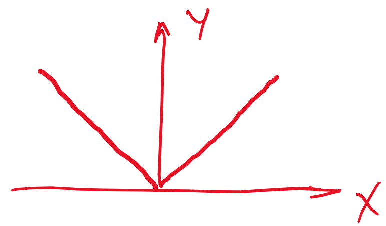
$$F_Y(y) = \begin{cases} P_r\left\{X \leqslant \dfrac{y-b}{a}\right\} & a > 0 \\ \\ P_r\left\{X \geqslant \dfrac{y-b}{a}\right\} & a < 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ \\ 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a>0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a<0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$2)\quad Y = |X| \implies Y \geq 0$$



$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{|X| \leq y\}$$

$$F_Y(y) = P_r\{\underbrace{\overset{x_2}{\widetilde{-y}} \leq X \leq \overset{x_1}{\widetilde{y}}}_{X \in A_y}\} = \int_{A_y} f_X(x)\,dx$$

$$F_Y(y) = \int_{-y}^{y} f_X(x)\,dx = F_X(y) - F_X(-y), \quad y \geq 0$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

توجه: اگر متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، آنگاه $y = g(x)$

نیز یک متغیر تصادفی گسسته است. در روابط قبل می‌توانیم از تابع pmf

متغیرهای تصادفی گسسته استفاده کنیم

$$\underbrace{Y}_{\text{گسسته}} = g(\underbrace{X}_{\text{گسسته}})$$

$$X \in \underbrace{\mathcal{X}}_{\text{شمارش‌پذیر}} \Rightarrow Y \in \underbrace{\mathcal{Y}}_{\text{شمارش‌پذیر}}$$

شمارش‌پذیر

$$\underbrace{P_r\{Y = i\}}_{P_Y(i)} = P_r\{g(X) = i\} = P_r\{X \in A_i\} = \sum_{A_i} P_X(x) =$$

تابعی از i همان $P_Y(i)$ است.

اگر شرایط خاصی در مورد تابع $g(\cdot)$ برقرار باشد، می توان $f_Y(y)$ را با یک رابطه به فرم بسته به دست آورد.

$$Y = g(X)$$

توابعی از y هستند

اگر $\boxed{y = g(x)}$ دارای تعداد شمارش پذیر جواب به فرم $x_1, x_2, \ldots, x_k$ باشد (یعنی $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \ldots, y_k = g(x_k)$) و تابع $g(\cdot)$ در نقاط جواب مشتق پذیر باشد، می توان $f_Y(y)$ را با یک رابطه به فرم بسته زیر به دست آورد.

$$(I)\quad f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

جواب های معادله $\{x_i\}_{i=1}^{k}$

$y = g(x)$ هستند

و در شعبه توابعی از y هستند.

مثال- برای توابع $g_1(x)$ و $g_2(x)$ در مثال قبل، بررسی کنید که آیا شرایط لازم برای استفاده از رابطه ی فرم بسته (I) برقرار هست یا خیر. در صورتی که شرایط برقرار است، تابع چگالی احتمال Y را با کمک رابطه (I) به دست بیاورید.

1) $y = ax + b = g_1(x)$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی است}} x_1 = \frac{y-b}{a}$$ معادله یک جواب دارد

و تابع $g_1(x)$ در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

$$y = ax + b = g(x) \Rightarrow g'(x) = a$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

(به عنوان تمرین انجام دهید)

2) $Y = |X| = g_2(X)$

$y = |x|$

مفهوم امید ریاضی Expectation

برای یک متغیر تصادفی X و یک تابع دلخواه $g(\cdot)$، امید ریاضی $g(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\underbrace{E\{g(X)\}}_{} \underset{\text{به اختصار}}{=} E\,g(\underset{\text{متغیر تصادفی}}{X}) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{g(x)}^{\text{نشان دهنده مقداری که } g(x) \text{ اختیار می‌کند}} \underbrace{f_X(x)\,dx}_{\text{نشان دهنده فراوانی است}} \equiv$$

$E\,g(X)$ معیاری از میانگین مقداری است که $g(X)$ اختیار می‌کند.

$E\,g(X)$ تابعیت از ζ ندارد زیرا میانگین گیری روی تمام مقادیری که $X = X(\zeta)$ اختیار می‌کند، انجام شده است و حاصل یک اسکالر است.

به تابعیت از $X=X(\xi)$ ندارد.

* اگر در رابطه امید ریاضی $Eg(X)$ به $g(X)$ به صورت یک متغیر تصادفی Y نگاه کنیم می‌توان نوشت.

$$Y=g(X)$$

$$\Rightarrow Eg(X) = EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

یعنی برای محاسبه $Eg(X)$ می‌توانیم تابع چگالی احتمال $Y=g(X)$ را به دست بیاوریم و با استفاده از رابطه بالا، $Eg(X)$ را محاسبه کنیم.

در این مورد قضیه‌ای برقرار است با عنوان قضیه اساسی امید ریاضی که بیان می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx \equiv E g(x)$$

(اثبات برای مطالعه)