به نام خدا

معرفی چند متغیر تصادفی

- متغیر تصادفی نمایی

کلاس جبرانی دوشنبه ۱۴۰۰/۹/۲۹ ساعت 16

کلاس در روز دوشنبه ۱۴۰۰/۱۰/۶ تشکیل نمی شود.

$$X \sim \text{exponential}(\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$$

متغیر تصادفی نمایی از متغیرهای پرکاربرد در بحث‌های مهندسی است. به طور مثال در مشکل‌های مخابراتی

- زمان رخ دادن یک مکالمه
- زمان درخواست یک مکالمه (request to call)
- بازه زمانی بین رخ دادن دو مکالمه
- طول بازه زمانی یک مکالمه

پارامترهایی هستند که با استفاده از متغیر تصادفی نمایی مدل‌سازی می‌شوند.

خصوصیت دیگری که این متغیر تصادفی دارد، خاصیت بدون حافظه بودن است.

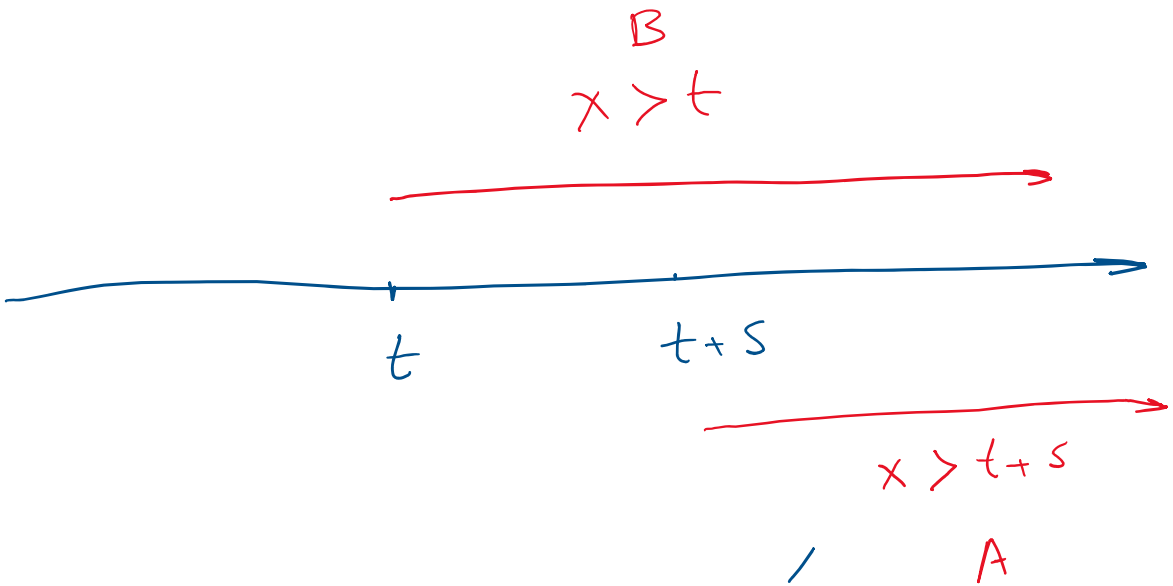
این خاصیت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\forall t, s > 0 \quad ; \quad P_r\{X > t+s \mid X > t\} = P_r\{X > s\}$$

$$P_r\{\underbrace{X > t+s}_{A} \mid \underbrace{X > t}_{B}\} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_r\{X > t+s,\ X > t\}}{P_r\{X > t\}}$$

$$= \frac{P_r\{X > t+s\}}{P_r\{X > t\}} \overset{*}{=} \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

$$\overset{*}{=} P_r\{X > s\}$$



$$A \cap B = A$$

$$P(A \cap B) = P(A)$$

پیش آمدهای مکمل

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \Longrightarrow P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x} u(x)$$

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$$

Laplacian

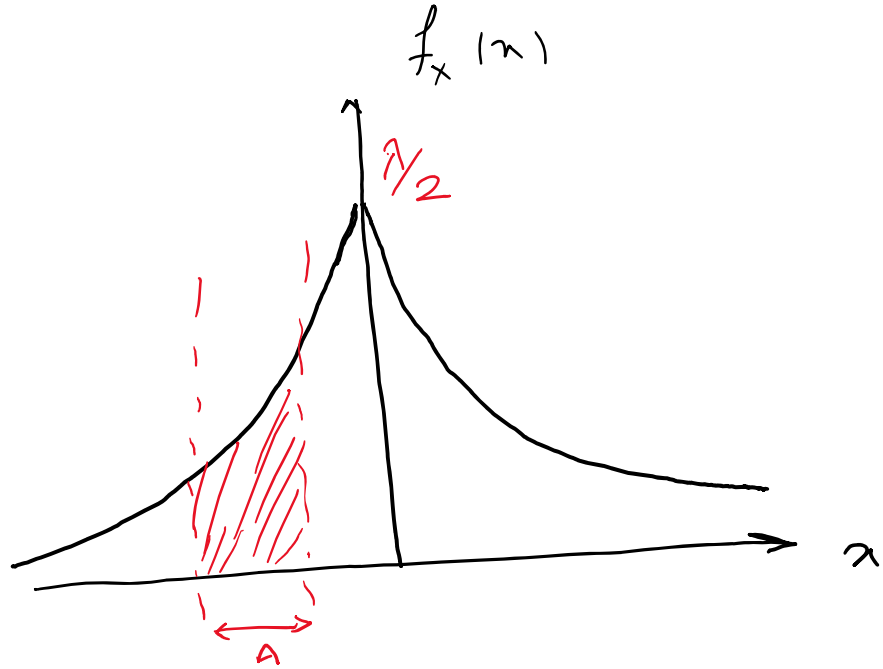
- توزیع لاپلاس (متغیر تصادفی لاپلاسین)

یک متغیر تصادفی X را لاپلاسین می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$

$$P_r\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$$

$$X \sim \text{Laplacian}(\lambda)$$



حول محور مختصات تقارن زوج دارد.

$x \in (-\infty, +\infty)$

بسیاری از توزیع‌ها را در سیستم‌های الکترونیکی می‌توانیم به صورت یک متغیر تصادفی لاپلاسین مدل‌سازی کنیم.

- توزیع گاما (متغیر تصادفی گاما)

Gamma

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی با توزیع گاما می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \, u(x)$$

$\longrightarrow X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$

X: مقادیر غیرمنفی را اختیار می‌کند

$r, \lambda > 0$

که در آن تابع $\Gamma(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(r) \triangleq \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} \, dy$$

تابع $\Gamma(\cdot)$ خصوصیات زیادی دارد از جمله اینکه همواره داریم

$$\Gamma(r) = (r-1)\underbrace{\Gamma(r-1)}_{(r-2)\underbrace{\Gamma(r-2)}}$$

* اگر r یک عدد طبیعی باشد، می‌توان نوشت

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

* اگر r یک عدد طبیعی باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گاما به صورت زیر در می‌آید

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \quad u(x)$$

به چنین متغیر تصادفی، متغیر تصادفی ارلانگ گفته می‌شود.

$X \sim \text{erlang}(r, \lambda)$

متغیر تصادفی ارلانگ برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌ها در مهندسی قابل استفاده است. به عنوان مثال زمان انتظار برای r امین رخ داد یک پیش‌آمد مورد نظر را می‌توان به صورت یک متغیر تصادفی ارلانگ مدل‌سازی کرد.

* می توان نشان داد که حاصلجمع r متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر λ ، یک متغیر تصادفی ارلنگ است.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r \quad ; \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_r$$

$$\underbrace{X_i \sim \exp(\lambda)}$$

iid : independent identically distributed ، با توزیع $\exp(\lambda)$ (هم توزیع و توأماً مستقل)

$$\Longrightarrow \quad X \sim \text{Erlang}(r, \lambda)$$

* در متغیر تصادفی ارلانگ، اگر $r=1$ را در نظر بگیریم، یک متغیر تصادفی نمایی خواهیم داشت.

$$X = X_1 \sim \exp(\lambda)$$

همچنین از رابطه توزیع $\text{erlang}(r,\lambda)$ اگر $r=1$ را در نظر بگیریم، داریم

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

که توزیع نمایی را نشان می‌دهد.

$$\text{Erlang}(1,\lambda) \equiv \exp(\lambda)$$

- توزیع $\chi^2(n)$ (Chi square ! n درجه آزادی)

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی با توزیع $\chi^2(n)$ می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u(x)$$

$\longrightarrow X \sim \chi^2(n)$

X مقادیر غیرمنفی را اختیار می‌کند.

* می‌توان نشان داد که حاصلجمع توان دوم n متغیر تصادفی گوسی مستقل و استاندارد، معادل یک متغیر تصادفی $\chi^2(n)$ است یعنی

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad ; \quad \underbrace{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \ , \ X_i \sim N(0,1)}_{\text{iid با توزیع } N(0,1)}$$

$$\Longrightarrow \quad X \sim \chi^2(n)$$

* تمرین: به ازای $n = 1$ معادل چه متغیر تصادفی است.

متغیر تصادفی $\chi^2(n)$ را بررسی کنید که

- توزیع بتا یا متغیر تصادفی بتا β

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی β می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

که در آن

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

- توزیع رایلی یا متغیر تصادفی رایلی

Rayleigh

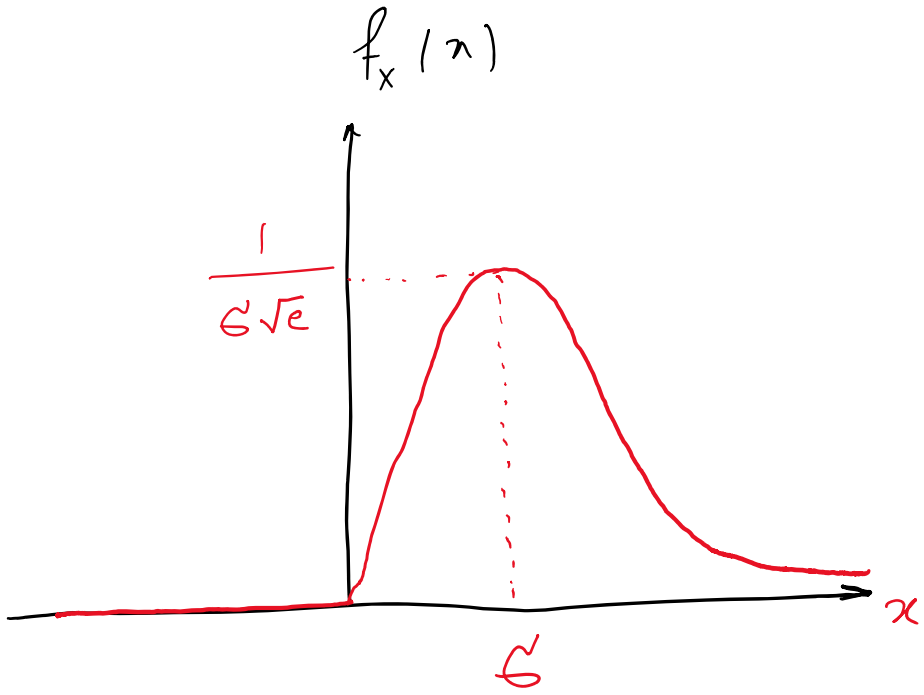
متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی رایلی می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x) \longrightarrow X \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

X مقادیر غیر منفی اختیار می‌کند.

متغیر تصادفی رایلی کاربردهای زیادی در بحث‌های مهندسی دارد. به عنوان مثال بسیاری از کانال‌های مخابراتی بی‌سیم (کانال‌های فیدینگ) را می‌توان با کمک متغیر تصادفی رایلی مدل‌سازی کرد.

Rayleigh fading channels



* متغیر تصادفی رایلی معادل پرش در متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 است یعنی

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad ; \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \quad , \quad X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Longrightarrow \quad X \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

* به ازای $\sigma^2 = 1$ ، توان دوم متغیر تصادفی نرمال معادل یک متغیر تصادفی $\chi^2(2)$ است.

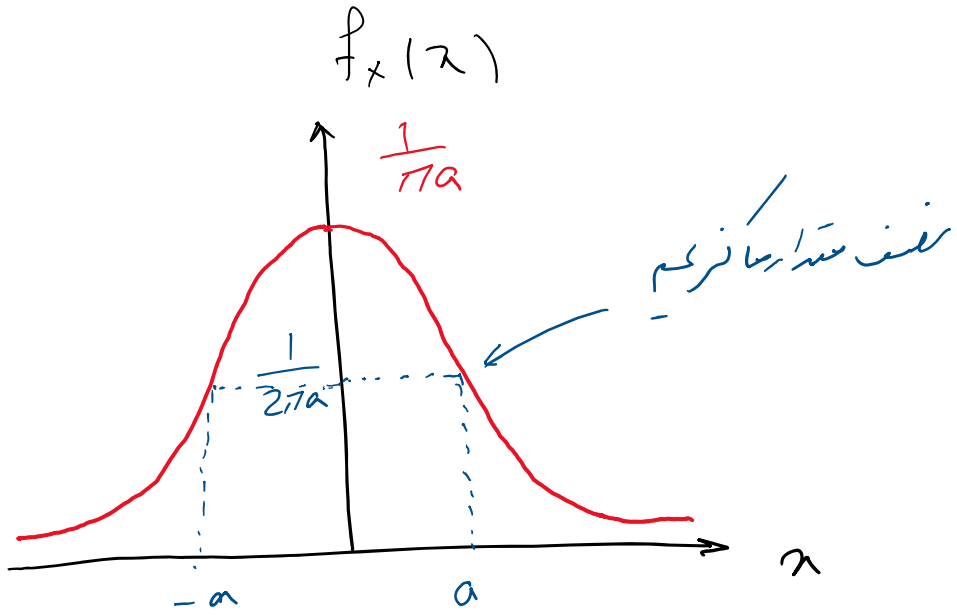
* می‌توان نشان داد که متغیر تصادفی $\chi^2(2)$ معادل یک متغیر تصادفی نمایی است.

- توزیع کوشی (متغیر تصادفی کوشی) Cauchy

یک متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی کوشی می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد،

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + x^2}$$

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + x^2}$$



(مشابه متغیر تصادفی کوشی، دارای خاصیت پایداری است)

تقارن زوج نسبت به محور مختصات دارد

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

2) متغیرهای تصادفی گسسته

در این بخش می‌خواهیم با چند متغیر تصادفی گسسته و پرکاربرد آشنا شویم.

- متغیر تصادفی برنولی Bernolli

همان طور که قبلاً هم اشاره شد، متغیر تصادفی برنولی یک متغیر تصادفی است که برای مدل‌سازی آزمایش‌های تصادفی که فقط دو نتیجه ممکن دارند، استفاده می‌شود. همچنین اگر یک پیش‌آمد خاص، مورد نظر باشد، برای مدل‌سازی رخداد یا عدم رخداد این پیش‌آمد مورد نظر می‌توانیم از متغیر تصادفی برنولی استفاده کنیم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

اگر پیش آمد مورد نظر رخ بدهد

اگر پیش آمد مورد نظر رخ ندهد

$X \sim Bernoulli(p)$

$p \equiv$ احتمال رخداد پیش آمد مورد نظر است.

مثال: آزمایش پرتاب تاس را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که پیش آمد مورد نظر A، پیش آمد این باشد که عدد ظاهر شده، کوچکتر یا مساوی 2 باشد. می‌توانیم از متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر برای مدل سازی این آزمایش تصادفی استفاده کنیم.

$$P_r\{A\} = P_r\{\text{عدد ظاهر شده، کوچکتر یا مساوی 2 باشد}\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = p$$

$$X = \begin{cases} 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{cases}$$

اگر پیش مورد نظر رخ بدهد

در غیر این صورت (رخ ندهد)

- متغیر تصادفی هندسی Geometric

متغیر تصادفی هندسی در ارتباط با تکرارهای مستقل یک آزمایش تصادفی (آزمایش برنولی) تعریف می‌شود و نشان دهنده تعداد آزمایش‌های لازم برای اولین رخداد پیش‌آمد مورد نظر است.

با توجه به تعریف متغیر تصادفی هندسی، یک متغیر تصادفی هندسی X، مقادیری را از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots\}$ را اختیار می‌کند.

در مورد متغیرهای تصادفی گسسته پس از اینکه مجموعه مقادیر را مشخص کردیم، کافی است تابع pmf آنها را نیز به دست بیاوریم. می‌دانیم که تابع pmf یک متغیر تصادفی گسسته، تابعی است که احتمال نقاط را برای مجموعه مقادیر آن متغیر تصادفی نشان می‌دهد. با داشتن تابع pmf یک متغیر تصادفی گسسته، اطلاعات آماری کامل آن را در اختیار خواهیم داشت.

برای متغیر تصادفی هندسی، داریم:

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots\}$$

$$= P_r\{\text{اینکه در آزمایش i ام پیش آمد مورد نظر رخ بدهد و در i-1 آزمایش قبلی پیش آمد مورد نظر رخ ندادن باشند}\}$$

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} = \underbrace{(1-P)(1-P)\dots(1-P)}_{i-1 \text{ بار برای } i-1 \text{ آزمایش قبلی}} \; P$$

برای آزمایش i ام

$$\Longrightarrow P_X(i) = P_r\{X = i\} = (1-P)^{i-1} P \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots\}$$

$$X \sim \text{Geometric}(P)$$

- متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی یا پاسکال Pascal

متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی X نشان دهنده تعداد آزمایش‌های لازم برای r امین رخداد پیش‌آمد مورد نظر است.

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی X مقادیری از مجموعه‌ی $\{r, r+1, \dots\}$ را اختیار می‌کند.

* به دست آوردن تابع pmf متغیر تصادفی X

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} \quad ; \quad i \in \{r, r+1, \dots\}$$

$$= P_r\{\text{در آزمایش } i \text{ ام پیش‌آمد مورد نظر رخ دهد و در } i-1 \text{ آزمایش قبلی پیش‌آمد مورد نظر } r-1 \text{ بار با هر ترتیبی رخ دهد.}\}$$

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} = \underbrace{\binom{i-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(i-1)-(r-1)}}_{\text{در } i-1 \text{ آزمایش قبلی، } r-1 \text{ بار با هر ترتیبی رخ داده}} \; p$$

در آزمایش i ام رخ بدهد

$$\Rightarrow P_X(i) = P_r\{X = i\} = \binom{i-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{i-r}$$

$$X \sim \text{Pascal}(p)$$