به نام خدا

- متغیر تصادفی گوسی یا نرمال

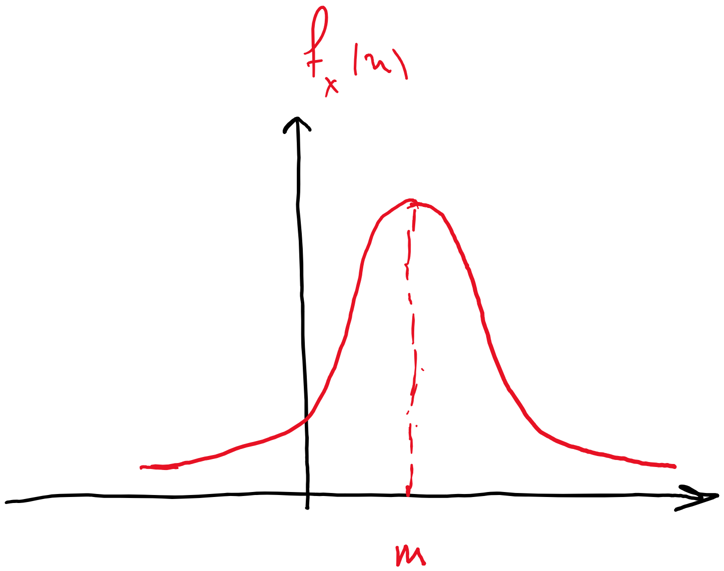
$X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

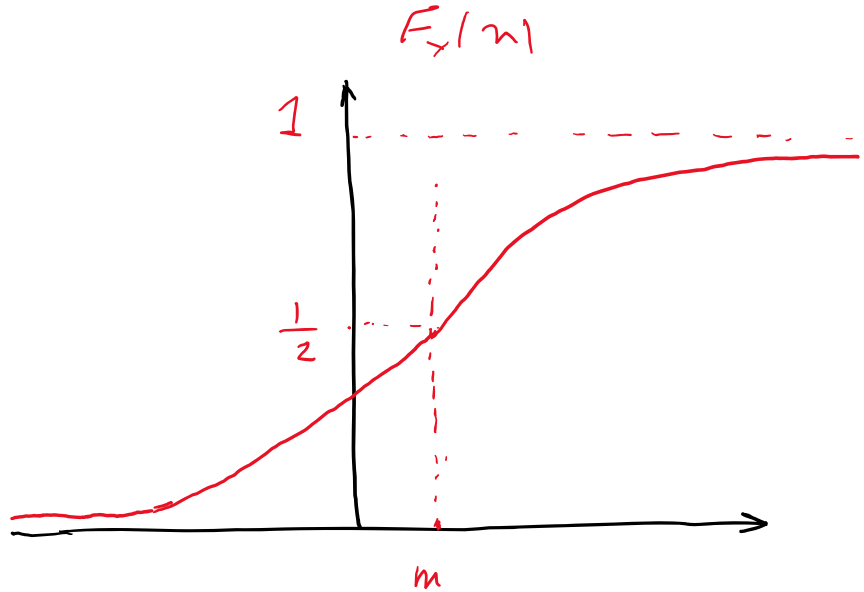
m : میانگین متغیر تصادفی X است.

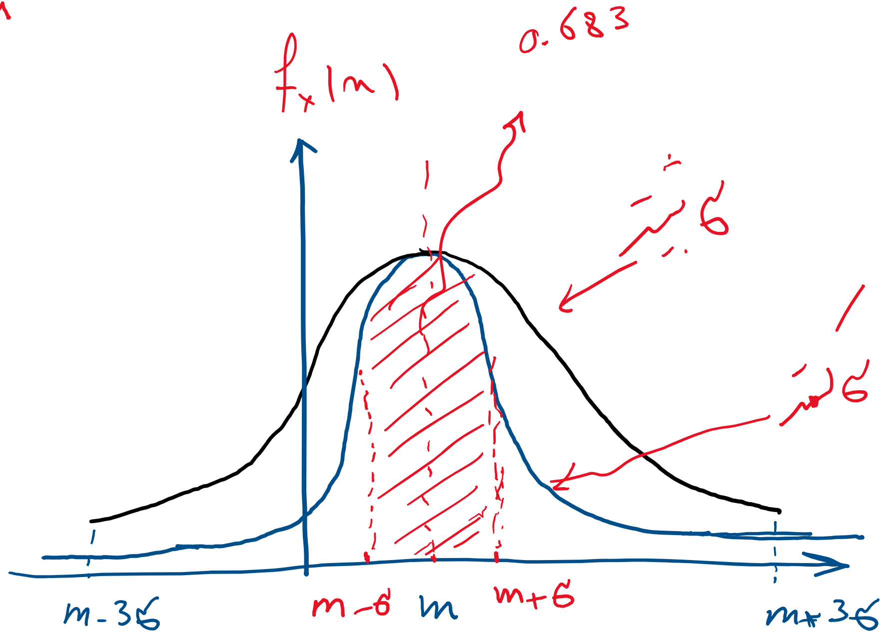
σ^2 : واریانس متغیر تصادفی X است.

σ : انحراف از معیار متغیر تصادفی X است.



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha \longrightarrow$$





هرچه σ بیشتر باشد،
پخش شدگی $f_X(x)$ حول میانگین
بیشتر خواهد بود

از نظر آماری، احتمال برخی بازه‌ها حول میانگین، اهمیت ویژه‌ای دارند. در ادامه برخی از این بازه‌ها که بر حسب ضرایب واریانس حول مقدار میانگین است، را معرفی خواهیم کرد.

$$P_r\{m-\sigma \leq X \leq m+\sigma\} = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f_X(x)\,dx = 0.683$$

$$P_r\{m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma\} = \int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f_X(x)\,dx = 0.954$$

$$P_r\{m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma\} = \cdots = 0.997$$

در ارتباط با متغیرهای تصادفی گوسی، توابع مختلف دیگر کاربردی معرفی می‌شوند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

این توابع براساس تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد یعنی $N(0,1)$ $(m=0\ ,\ \sigma^2=1)$ تعریف شده‌اند.

$$Y \sim N(0,1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

با توجه به اینکه می‌خواهیم در حالت کلی با متغیرهای تصادفی گوسی با چگالی $N(m,\sigma^2)$ کار کنیم، لازم است ارتباط بین یک متغیر تصادفی گوسی استاندارد را با متغیر تصادفی $N(m,\sigma^2)$ مشخص کنیم.

اگر متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی $N(m, \sigma^2)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$X = aY + b$$

(معادل یک scaling با ضریب a و یک شیفت به مقدار b)

برای تغییر واریانس — برای تغییر میانگین

$$X \sim N(m, \sigma^2) \quad , \quad Y \sim N(0, 1)$$

هدف: پیدا کردن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X برحسب چگالی احتمال متغیر تصادفی Y در نتیجه یافتن مقادیر a و b است.

برای این منظور از تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X شروع می‌کنیم (چون ماهیت آن، احتمال یک پیشامد در ارتباط با X است) و با مشتق‌گیری از آن به تابع چگالی احتمال X می‌رسیم.

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = P_r\{ay+b \leq x\}$$

$X = ay + b$

$$\Rightarrow F_X(x) = P_r\{\underbrace{y \leq \frac{x-b}{a}}_{Y \in A}\} = \int_A f_Y(y)\,dy$$

$a > 0$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_Y(y)\,dy$$

$$\underbrace{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{\alpha-b}{a}\right)^2}{2}\right) \frac{1}{a}\, d\alpha$$

تغییر متغیر

$$x' = \frac{x-b}{a}$$

$$\alpha = ay + b$$

$$d\alpha = a\, dy$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(\alpha-b)^2}{2a^2}\right)}_{f_X(\alpha)} d\alpha$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad X \sim N(b, a^2)$$

$$y \sim N(0,1) \xrightarrow{ay+b=X} X \sim N(b, a^2)$$

$$y \sim N(0,1) \xrightarrow[X=\sigma y+m]{?} X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$y \sim N(0,1) \xleftarrow{y=\frac{X-m}{\sigma}} X \sim N(m, \sigma^2)$$

با استفاده از تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد، توابعی تعریف شده اند که کاربردهای زیادی در بحث احتمال و سایر بحث‌های مهندسی و ریاضیات دارند. به همین جهت مقادیر این توابع نیز به صورت جدول‌هایی درآمده است که کاربرد آنها را ساده‌تر کند. به عنوان مثال برای به دست آوردن مقادیر این توابع در نقاط مختلف نیازی به محاسبه انتگرال‌های مربوطه نباشد و با مراجعه به جدول، مقدار انتگرال محاسبه شده، در دسترس است.

با توجه به اینکه رابطه بین یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و یک متغیر تصادفی نرمال $N(m,\sigma^2)$ را به دست آوردیم، می‌توانیم از این توابع و جدول‌ها که با توجه به تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال استاندارد تعریف شده اند، برای متغیر تصادفی $N(m,\sigma^2)$ نیز استفاده کنیم.

در ادامه به معرفی این توابع که براساس تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد تعریف شده اند، می پردازیم:

1) $F_Y(y)$

برای یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y داریم:

$$Y \sim N(0,1) \quad , \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$\underbrace{F_Y(y)}_{P_r\{Y \leq y\}} = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha = P_r\{Y \leq y\} \quad (1)$$

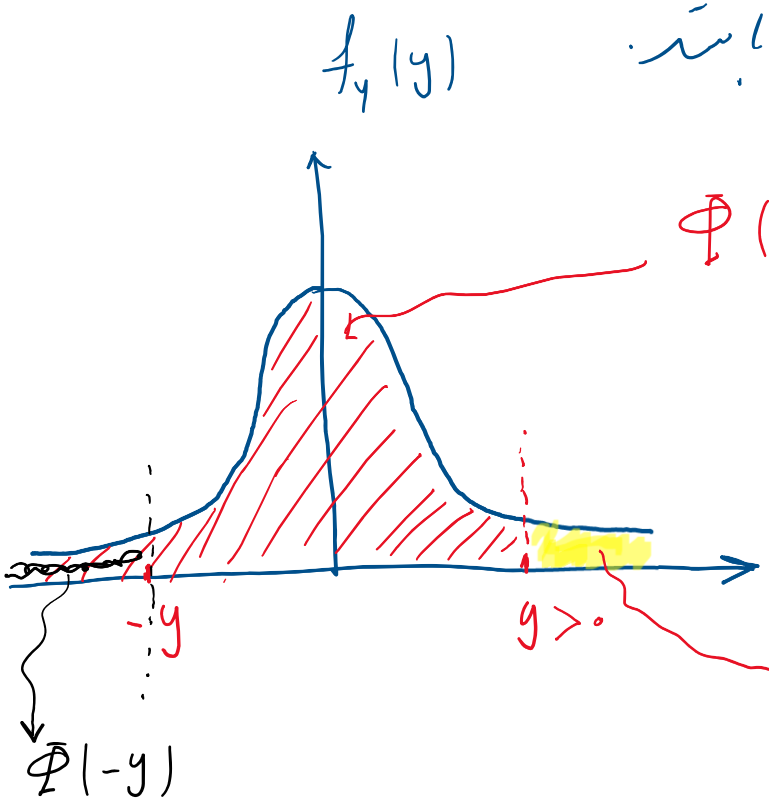
$$F_Y(y) \equiv G(y) \equiv \Phi(y)$$

نامگذاری های مختلف تابع

$\Phi(y)$ به ازای مقادیر مختلف y ، در قالب جدولهایی در دسترس است. به این ترتیب

لازم نیست که انتگرال رابطه ① محاسبه شود. در عوض می توان، مقادیر را از جدول استخراج کرد.

در مورد $\Phi(y)$ توجه به نکات زیر می تواند کمک کننده باشد.



$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\alpha)\,d\alpha$$

تقارن زوج

$$1-\Phi(y) = \Phi(-y) \qquad y>0$$

1) $\Phi(-|y|) = 1 - \Phi(|y|) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

2) $X \sim N(m, \sigma^2)$; $F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

$Y \sim N(0,1)$

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$X = \sigma Y + m$ & $Y = \frac{X-m}{\sigma}$

$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = P_r\{\sigma Y + m \leq x\} = P_r\left\{Y \leq \frac{x-m}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

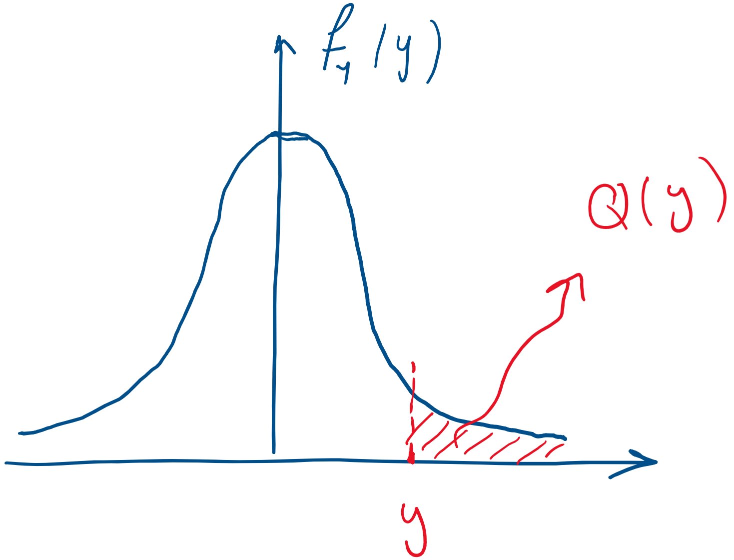
Q - function (2

تابع دیگری که در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y تعریف می‌شود تابع $Q(\cdot)$ است

که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q(y) \triangleq \int_y^{\infty} f_Y(\alpha)\, d\alpha = \int_y^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$$

$$= P_r\{Y \geq y\} = 1 - \Phi(y)$$



به این ترتیب خصوصیات تابع $Q(y)$ مشابه تابع $\Phi(y)$ است.

$$1)\quad Q(-|y|) = 1 - Q(|y|)$$

$$2)\quad X \sim N(m, \sigma^2) \quad , \quad P_r\{X \geq x\} = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$Y \sim N(0,1) \quad , \quad X = \sigma Y + m \longrightarrow P_r\{X \geq x\} = P_r\left\{Y \geq \frac{x-m}{\sigma}\right\} = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$Y = \frac{X-m}{\sigma}$$

error function

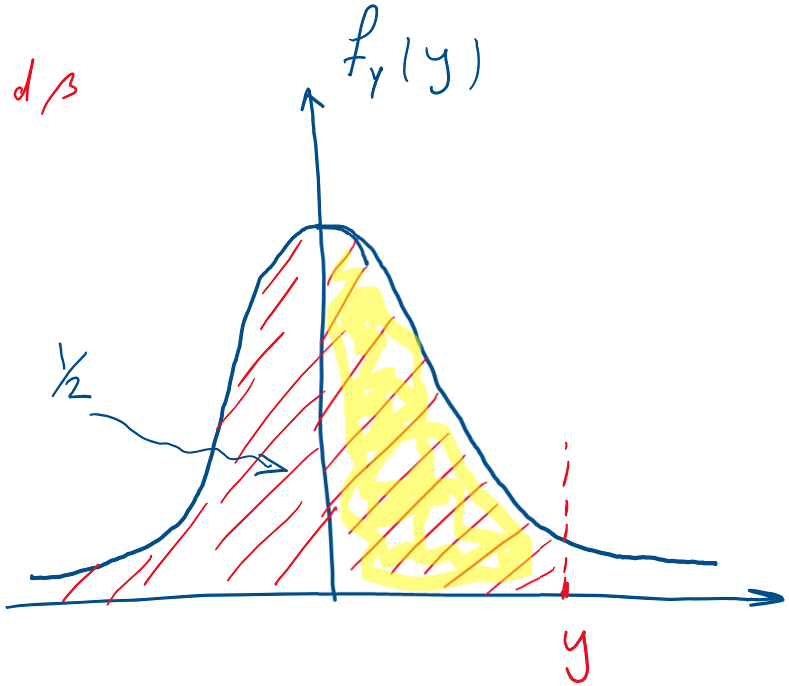
13

تابع دیگری که در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y تعریف می‌شود تابع $erfc(.)$ است که به صورت زیر قابل بیان است.

$$erfc(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\beta^2} d\beta$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \frac{y^2}{2} = \beta^2 \ , \ \beta = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha = \int_{-\infty}^{\frac{y}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} \, d\beta$$



$$\boxed{\Phi(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 \; ; \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \implies d\beta = \frac{d\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{erfc} = \int_{0}^{y} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} \, d\beta$$

مثال : در سیستم های مخابراتی ، نویز جمع شونده معمولاً به صورت یک متغیر تصادفی گوسی مدل‌سازی می‌شود. فرض کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده نویز جمع شونده در یک سیستم مخابراتی باشد که به صورت یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و انحراف از معیار $\underbrace{\frac{3}{4}}_{\sigma}$ مدل‌سازی شده است. احتمال های زیر را برای این متغیر تصادفی را به دست باید دید.

$X \sim N\left(0, \frac{9}{16}\right)$

1) احتمال اینکه اندازه نویز جمع شونده کوچکتر یا مساوی $\frac{3}{2}$ باشد.

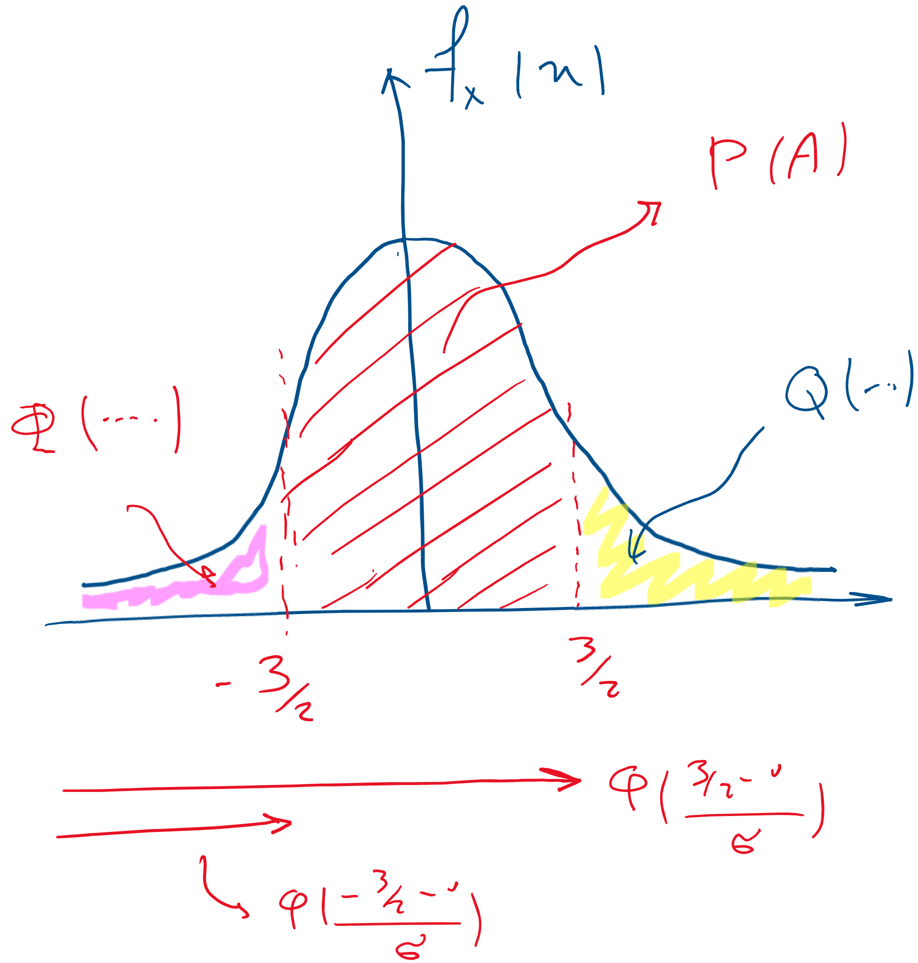
$$P(A) = P_r\{\underbrace{|X| \leq \frac{3}{2}}_{A}\} = P_r\{-\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\} = \int_{-3/2}^{3/2} f_X(x)\,dx$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{9}{16}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \times \frac{9}{16}}\right)$$

$$P(A) = \int_{-3/2}^{3/2} f_X(x)\, dx$$

به جای محاسبه انتگرال بالا می‌توانیم از توابع $\Phi(\cdot)$

یا $Q(\cdot)$ یا $erfc(\cdot)$ استفاده کنیم!



$$P(A) = P_r\left\{-\frac{3}{2} < X < \frac{3}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{3/2 - 0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{3}{2} - 0}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{3/2}{3/4}\right) - \underbrace{\Phi\left(\frac{-3/2}{3/4}\right)}_{1 - \Phi\left(\frac{3/2}{3/4}\right)} = 2\Phi(2) - 1 = 0.954$$

$$\frac{3}{2} = 2\sigma$$

$$\Phi(-|y|) = 1 - \Phi(|y|)$$

$$P(A) = P_r\left\{-\frac{3}{2} < X < \frac{3}{2}\right\} = \underbrace{Q\left(\frac{-3/2 - 0}{\sigma}\right)}_{1 - Q\left(\frac{3/2}{\sigma}\right)} - Q\left(\frac{3/2 - 0}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - 2Q\left(\frac{3/2}{\sigma}\right) = 1 - 2Q(2)$$

تمرین: $P(A)$ را برحسب $\operatorname{erfc}(.)$ به دست بیاورید.

2) محاسبه کنید که سطح نویز با احتمال 0.99 از چه مقداری بیشتر نمی‌شود. (صدک ۹۹)

$$P_r\{X \leq ?\} = 0.99 = P(B)$$

$$P(B) = P_r\{X \leq \alpha\} = 0.99 \longrightarrow \alpha = ?$$

$$P(B) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)\,dx = \Phi\left(\frac{\alpha - 0}{\sigma}\right) = 0.99$$

$$\xrightarrow[\Phi(\cdot)]{\text{مراجعه به جدول}} \quad \Phi\left(\frac{\alpha}{3/4}\right) = 0.99$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{3/4} = \Phi^{-1}(0.99) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4}\,\Phi^{-1}(0.99)$$

$$\xRightarrow{\text{مراجعه به جدول}} \quad \alpha = \frac{3}{4} \times 2.326$$

$$\uparrow$$

$$\Phi(2.326) = 0.99 \quad \longrightarrow \quad \Phi^{-1}(0.99) = 2.326$$

3) محاسبه کنید که اندازه سطح نویز با احتمال 0.99 از چه مقداری بیشتر نخواهد شد

$$P_r\{|X| < ?\} = 0.99$$

$$P_r\{|X| < \beta\} = P_r\{-\beta \le X \le \beta\} = 0.99 = P(C)$$

$$P(C) = P_r\{-\beta \le X \le \beta\} = 2\Phi\left(\frac{\beta - 0}{\sigma}\right) - 1 = 1 - 2Q\left(\frac{\beta - 0}{\sigma}\right)$$

مراجعه به جدول

$$\xrightarrow[Q(.)]{} \quad 1 - 2Q\left(\frac{\beta}{3/4}\right) = 0.99 \Longrightarrow Q\left(\frac{\beta}{3/4}\right) = 0.005$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\beta}{3/4} = Q^{-1}(0.005)$$

طرفین وسطین

$$\Longrightarrow \quad \beta = \frac{3}{4} Q^{-1}(0.005) = \frac{3}{4} \ell$$

$$Q(\ell) = 0.005$$

$$Q^{-1}(0.005) = \ell$$

مثال : متغیر تصادفی نمایی (توزیع نمایی) exponential

متغیر تصادفی نمایی X ، متغیری است که تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر است ،

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & oth \end{cases}$$

متغیر تصادفی نمایی فقط مقادیر غیر منفی را اختیار می کند.

با کمک تابع پله واحد می توان تابع چگالی احتمال را به صورت مقابل نوشت

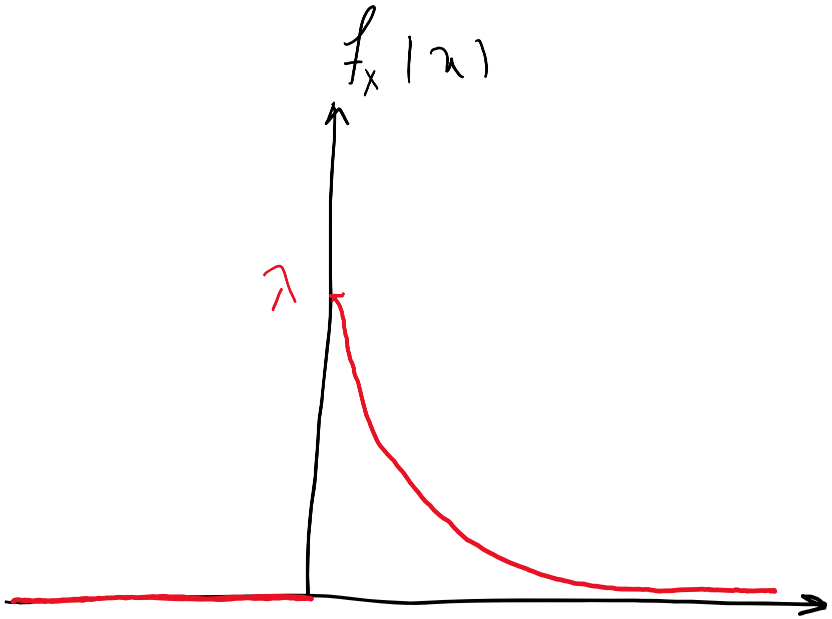
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

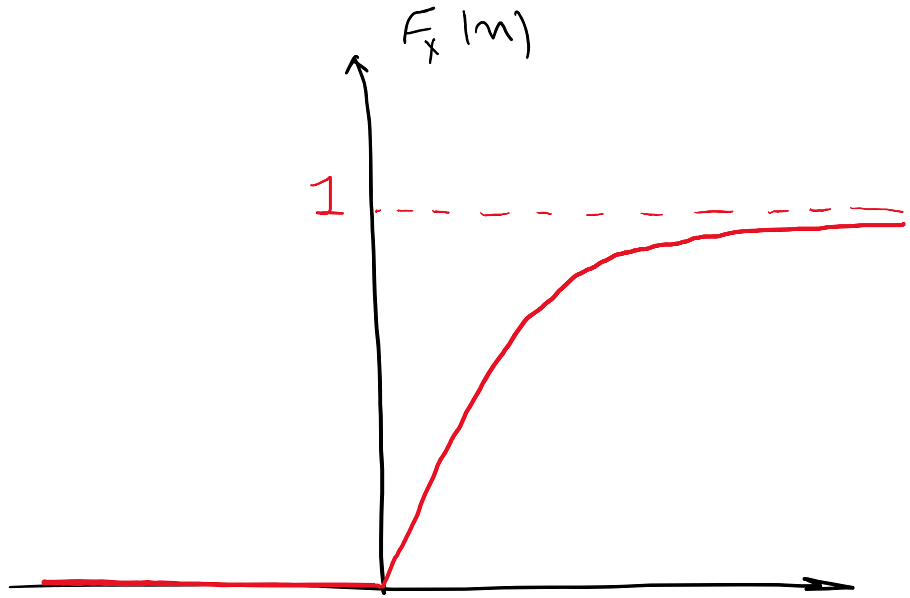
با داشتن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نمایی ، می توانیم تابع توزیع احتمال آن را نیز بدست بیاوریم .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda \alpha}\, d\alpha \quad , \; x \geq 0$$

$$= -e^{-\lambda\alpha}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) u(x)$$





$$X \sim \exp(\lambda)$$

با یک پارامتر λ مشخص می‌شود.